

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA
WYKŁAD 9: ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE I DYSKRETNE.

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa X ma dystrybuantę F , to*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Natomiast dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) o dystrybuancie $F_{X,Y}$ mamy

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

Twierdzenie. *Dla zmiennej losowej dyskretnej X dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ mamy:*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Podobnie, dla zmiennej losowej ciągłej o gęstości f i dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{x \in A} f(x) dx.$$

Twierdzenie (Nierówność Markowa). *Dla dowolnego $a > 0$*

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{a}.$$

Twierdzenie (Nierówność Czebyszewa). *Dla dowolnego $b > 0$*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq b) \leq \frac{\text{Var}X}{b^2}.$$

Tabela najczęściej spotykanych rozkładów zmiennych losowych dyskretnych

Rozkład	parametry	$\mathbb{P}(X = k)$	dla $k =$	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	uwagi
dwumianowy	n, p	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$	liczba sukcesów w n próbach Bernoulliego.
Poissona	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$0, 1, 2, \dots$	λ	λ	
geometryczny	p	$(1-p)^{k-1} p$	$1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	liczba doświadczeń do pierwszego sukcesu.
rozkład Pascala	p, r	$\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	$r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	liczba doświadczeń do r -tego sukcesu.
hipergeometryczny	N, m, n	$\frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$0, 1, 2, \dots, n$	$\frac{km}{N}$		liczba wylosowanych kul typu A, jeśli losujemy jednocześnie n kul z urny, w której jest N kul, w tym m kul typu A.

Uwaga Jeśli X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p , to $\mathbb{P}(X = k)$ najpierw monotonicznie rośnie, przyjmuje największą wartość dla $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$ (w przypadku, gdy $(n+1)p$ jest całkowite przyjmuje największą wartość również dla $k = \lfloor (n+1)p \rfloor - 1$), a następnie maleje.

Zmienna losowa X o rozkładzie wykładniczym ma gęstość daną wzorem $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ dla $x \geq 0$, a dystrybuantę $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ dla $x \geq 0$. Wtedy $\mathbb{E}X = 1/\lambda$, a $\text{Var}X = 1/\lambda^2$.

1. ZADANIA NA ĆWICZENIA

Zadanie 1. Dystrybuanta zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y)) & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Znajdź gęstość $f_{X,Y}$.
- (b) Znajdź dystrybuanty F_X , F_Y i gęstości f_X , f_Y .
- (c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
- (d) Korzystając z dystrybuanty $F_{X,Y}$, znajdź $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 4, 2 \leq Y < 3)$.

Zadanie 2. Gęstość zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cy & \text{dla } (x, y) \text{ należących do trójkąta o wierzchołkach } (0, 0), (0, 4), (1, 4). \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Znajdź stałą c .
- (b) Wylicz gęstość f_X , dystrybuantę F_X i wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$.
- (c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Czy aby to stwierdzić, trzeba wyliczyć f_Y bądź F_Y ?
- (d) Korzystając z dystrybuanty F_X , znajdź $\mathbb{P}(1/2 \leq X \leq 3/2)$.
- (e) Oblicz $\mathbb{P}(1/2 \leq X \leq 3/2)$, tym razem korzystając z gęstości f_X .
- (f) Wylicz prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(X \geq 7/8)$, a następnie oszacuj je korzystając z nierówności Markowa.

Zadanie 3. Na pewnym poznańskim skrzyżowaniu zdarza się średnio 0,9 wypadków rocznie. Oblicz dokładnie prawdopodobieństwo, że w przyszłym roku na tym skrzyżowaniu zajdą co najmniej trzy wypadki, a następnie oszacuj to prawdopodobieństwo, używając nierówności Markowa i nierówności Czebyszewa.

Zadanie 4. Pięć stacji pomiarowych na pięciu różnych kontynentach rejestruje wysokoenergetyczne cząstki kosmiczne. Liczba cząstek zarejestrowanych rocznie przez każdą ze stacji ma rozkład Poissona, ze średnią 3,6. Znajdź prawdopodobieństwo, że dokładnie trzy z pięciu stacji zarejestrują więcej niż 3 cząstki w następnym roku.

2. ZADANIA DOMOWE

Zadanie 1. Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2/8 + x^4/32 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

Znajdź $\mathbb{P}(X \in [-1, 1/2) \cup (3/2, 4))$.

Zadanie 2. Zmienna losowa ciągła X posiada dystrybuantę:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < c \\ (x - 1)^2 & \text{dla } c \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Wyznacz stałą c .
- (b) Korzystając z dystrybuanty, oblicz $\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq X \leq 4)$.
- (c) Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .

Zadanie 3. W urnie znajduje się n białych i m czarnych kul. Losujemy kule ze zwracaniem tak długo, aż wylosujemy kulę białą. Niech X oznacza liczbę losowań. Podaj rozkład, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .

Zadanie 4. Hurtownia zaopatruje 10 sklepów. Każdy sklep przysyła w danym dniu zamówienie z prawdopodobieństwem 0,4. Podaj rozkład zmiennej losowej, jaką jest dzienna liczba zamówień otrzymanych przez hurtownię (co to za rozkład?). Jaka jest

- a) średnia,
- b) najbardziej i najmniej prawdopodobna liczba zamówień?

Zadanie 5. Nocny tramwaj przyjeżdża co 30 minut, zaczynając od północy. Student przychodzi na przystanek X minut po północy (X nie musi być liczbą całkowitą), przy czym dystrybucja zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ x/50 & \text{dla } 0 \leq x \leq 50 \\ 1 & \text{dla } x > 50. \end{cases}$$

- a) Znajdź gęstość zmiennej losowej X .
- b) Korzystając z dystrybucji, znajdź prawdopodobieństwo, że student będzie czekać na tramwaj krócej niż 15 minut.
- c) Rozwiąż poprzednie zadanie korzystając z gęstości.

Zadanie 6. Czas pracy X pewnego urządzenia (liczony w dniach) ma rozkład dany dystrybucją $F(x) = 1 - e^{-x/400}$ dla $x \geq 0$ i $F(x) = 0$ dla $x \leq 0$. Znajdź prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie działało przez rok (nieprzestępny). Jaki to rozkład? Wypisz gęstość f_X zmiennej losowej X . Jaka jest jej wartość oczekiwana, a jaka wariancja? Oblicz dokładną wartość $\mathbb{P}(X \geq 1000)$, a następnie oszacuj je korzystając z nierówności Markowa, a potem z nierówności Czebyszewa.