

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA
WYKŁAD 8: ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE.

Przypomnijmy, że dowolną funkcję (mierzalną) $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy **wektorem losowym** lub **zmienną losową dwuwymiarową**. Dla takiego wektora **dystrybuanta** $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) .$$

Definicja. Jeśli dystrybuanta $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, daje się zapisać jako

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds ,$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, to zmienną losową (X, Y) nazywamy **(absolutnie) ciągłą**, a funkcję $f_{X,Y}$ **gęstością** zmiennej losowej (X, Y) . Wtedy

$$f_{X,Y}(s, t) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=s, t=y} ,$$

dla prawie wszystkich wartości (s, t) .

Zauważmy, że wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) ds dt = 1 .$$

Jeśli (X, Y) jest (absolutnie) ciągłą, to gęstość i dystrybuantę zmiennej losowej X znajdujemy ze wzorów

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t) dt ,$$

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) .$$

Podobnie zmienna losowa Y ma gęstość

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, y) ds$$

i dystrybuantę

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) .$$

Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}g(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, t) f_{X,Y}(s, t) dt ds ,$$

czyli, np.

$$\mathbb{E}(X^2 Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s, t) dt .$$

Definicja. Zmienne losowe X i Y są **niezależne**, jeśli dla wszystkich każdej pary $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y) .$$

Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, to X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) ,$$

dla (prawie) wszystkich x i y .

DODATEK A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

Zadanie 1. Zmienna losowa ciągła X ma dystrybuantę daną wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ cx^3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x \geq 1, \end{cases}$$

gdzie c jest pewną stałą. Znajdź wartość c , gęstość $f(x)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ i wariancję $\text{Var } X$.

Zadanie 2. Gęstość zmiennej losowej X zadana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{gdy } x \in (-2, -1), \\ bx & \text{for } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie a i b są stałymi.

Znajdź wartości a i b wiedząc, że $\mathbb{E}X = 0$. Oblicz $\text{Var } X$ i znajdź dystrybuantę F_X tej zmiennej losowej.

Zadanie 3. Na odcinku $[0, 1]$ wybieramy losowo dwa punkty. Niech Z będzie zmienną losową oznaczającą odległość między tymi punktami.

- (i) Znajdź dystrybuantę F_Z , gęstość f_Z , wartość oczekiwaną $\mathbb{E}Z$ i wariancję $\text{Var } Z$.
- (ii) Znajdź dystrybuantę F_X zmiennej losowej $X = Z^2$, jej gęstość f_X i wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$.
- (iii) Jak obliczyć $\mathbb{E}X$ nie znajdując gęstości f_X ?
- (iv) Jak wyznaczyć f_X nie korzystając z wyznaczonego w podpunkcie (ii) wzoru na F_X ?

DODATEK B. ZADANIA DOMOWE

Przypominam, że $(x^t)' = tx^{t-1}$ i $\int_a^b x^u dx = \frac{b^{u+1} - a^{u+1}}{u+1}$ **jeśli tylko** $u \neq -1$.

Zadanie 1. Zmienna losowa (X, Y) ma dystrybuantę daną wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x, y \geq 1, \\ xy & \text{gdy } x, y \in (0, 1), \\ x & \text{gdy } x \in (0, 1) \text{ i } y \geq 1, \\ y & \text{gdy } y \in (0, 1) \text{ i } x \geq 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź gęstość $f_{X,Y}(x, y)$ i gęstości $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\text{Cov}(X, Y)$.

Zadanie 2. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx^2y & \text{gdy } x \in [0, 1] \text{ i } y \in [1, 2], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź wartość stałej c oraz rozkłady brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 3. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (x, y) \text{ należy do trójkąta o wierzchołkach } (0, 0), (2, 0), (2, 1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź rozkłady brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 4. Wybieramy losowo punkt (x, y) z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Niech X i Y będą odpowiednio zmiennymi losowymi oznaczającymi współrzędne tego punktu, a $Z = X + Y$. Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennych losowych dwuwymiarowych (X, Y) i (X, Z) . Znajdź ich rozkłady brzegowe, tzn. rozkłady zmiennych losowych X , Y i Z , i oblicz ich wartości oczekiwane. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Czy zmienne losowe X i Z są niezależne?