Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 7: Zmienne losowe ciągłe.

Definicja. *Zmienną losową* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *nazywamy* **ciągłą**, *jeśli jej dystrybuanta* $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *zdefiniowana wzorem*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x),$$

jest ciągła w każdym punkcie.

Równoważna definicja mówi, że zmienna losowa X *jest ciągła, gdy nie zawiera atomów, tzn. dla każdego* x *mamy* $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Uwaga: Nie każda zmienna losowa, która nie jest dyskretna, jest ciągła, choć każdą zmienną losową można przedstawić jako sumę zmiennej losowej dyskretnej i zmiennej losowej ciągłej.

Dla wielu zmiennych losowych ciągłych X, w tym prawie wszystkich, z którymi będziemy miec do czynienia na ćwiczeniach, istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zwana **gestością**, taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Wtedy, oczywiście,

$$f(x) = F_X'(x).$$

Uwaga: Dystrybuanta F_X jest jednoznacznie zdefiniowana dla każdej zmiennej losowej X, natomiast jej gęstość f, nawet gdy istnieje, występuje zwykle pod całką i dlatego jest zdefiniowana z dokładnością do zbioru miary zero, czyli bez żadnych konsekwencji (z wyjątkiem braku elegancji) możemy dowolnie przedefiniowac ją w kilku punktach dziedziny.

Własności gęstości:

(i) $f(x) \geqslant 0$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

Twierdzenie. *Niech* X *będzie zmienną losową ciągłą o gęstości* f *i niech* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie dowolną funkcją (mierzalną). Wtedy*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt,$$

w szczególności

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt.$$

1. Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. W pierwszej urnie znajduje się 5 kul białych i 3 czarne, a w drugiej 2 białe i 2 czarne. Z pierwszej urny losujemy jedną kulę, a z drugiej również jedną kulę. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę kul białych wśród dwóch wylosowanych kul, a Y liczbą wylosowanych kul czarnych.

(i) Znajdź rozkład łączny (X, Y).
(ii) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(iii) Oblicz $\mathbb{E}X$ i $\mathbb{E}Y$, korzystając z rozkładów brzegowych X i Y.
(iv) Oblicz $\mathbb{E}X$, przedstawiając X w postaci sumy $X = X_1 + X_2$, gdzie X_i oznacza liczbę białych kul wyciągniętych z i-tej urny.
(v) Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $Z = X + Y$?
(vi) Znajdź współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$. Czy można to zrobić prościej, korzystając z (v) i nie używając rozkładu łącznego (X, Y)?

Zadanie 2. Rzucamy symetryczną kostką tak długo, aż nie wypadnie szóstka. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znajdź $\mathbb{E}X$ i $\operatorname{Var} X$.

Wskazówka: *Dla każdego $x \in (-1, 1)$ mamy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Zadanie 3. Wyraź $\operatorname{Var}(X+Y)$ jako funkcję $\operatorname{Var} X$, $\operatorname{Var} Y$ i $\operatorname{Cov}(X, Y)$. Czemu równa się $\operatorname{Var}(X+Y)$ gdy zmienne X i Y są nieskorelowane (tzn. gdy $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$)?

Zadanie 4. Rzucamy symetryczną kostką tak długo, aż nie wyrzucimy trzech szóstek, niekoniecznie po kolei. Niech Y oznacza liczbę wykonanych rzutów. Nie znajdując rozkładu Y znajdź $\mathbb{E}Y$ i $\operatorname{Var} Y$.

Zadanie 5. Znajdź $\mathbb{E}X$ i $\operatorname{Var} X$ dla zmiennej losowej X o rozkładzie Bernoulliego $B(n, p)$, tzn. takiej, że

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zadanie 6. Pokaż, że $\operatorname{Cov}(X+Y, Z) = \operatorname{Cov}(X, Z) + \operatorname{Cov}(Y, Z)$.

Czy można wyrazić

$$\operatorname{Cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m),$$

przez $\operatorname{Cov}(X_i, Y_j)$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$?

Zadanie 7. Rzucamy n razy kostką. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych szóstek, a Y liczbę wyrzuconych czwórek. Znajdź współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$.

2. Zadania domowe

Zadanie 1. Niech
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ x^3/8 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$
będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Znajdź gęstość X i oblicz $\mathbb{E}X$.

Zadanie 2. Gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:
$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{dla } x \in [0,3] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,3]. \end{cases}$$
Znajdź dystrybuantę i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Zadanie 3. Nasz dobry znajomy, pan January, przychodzi na przystanek autobusowy w losowym momencie pomiędzy 7:00 i 8:00. Według ostatnio zmienionego rozkładu, autobus przyjeżdza na przystanek pana Januarego, w godzinach 7:10, 7:40 i 8:05. Niech X będzie czasem oczekiwania pana Januarego na autobus, mierzonym w minutach (i ułamkach minut). Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej X. Zakładamy, że autobusy przyjeżdżają na przystanek dokładnie zgodnie z rozkładem.

Zadanie 4. Kij o długości 1 łamiemy w losowym miejscu na dwie części. Niech X oznacza długość krótszej, a Y dłuższej z dwóch części. Znajdź dystrybuantę, gęstość i wartość oczekiwaną X. Jaka jest wartość oczekiwana Y?

Zadanie 5. Strzelamy do tarczy o kształcie kwadratu o boku 1. Jeśli miejsce trafienia odległe jest od najbliższej krawędzi kwadratu o k, wtedy wygrywamy $2k$, czyli, np. gdy trafimy w środek kwadratu to wygrywamy 1. Niech X oznacza wygraną w tej grze. Znajdź dystrybuantę, gęstość i wartość oczekiwaną X.