

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA  
 WYKŁAD 5: ZMIENNE LOSOWE. ROZKŁAD ZMIENNEJ LOSOWEJ.  
 FUNKCJA MASY. DYSTRYBUANTA. WARTOŚĆ OCZEKIWANA.

**Definicja.** Zmienną losową nazywamy funkcję (mierzalną)  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  działającą z przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  do zbioru liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

Dla  $A \subseteq \mathbb{R}$  przyjmujemy oznaczenie  $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$ .

**Definicja.** Zmienna losowa jest **dyskretna**, jeśli istnieje przeliczalny zbiór  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  (nazywany zbiorem atomów) taki, że  $\mathbb{P}(a_i) > 0$  dla każdego  $a_i \in A$  oraz

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a_i \in A} \mathbb{P}(X = a_i) = 1.$$

W celu podania rozkładu zmiennej losowej dyskretnej, wystarczy podać wartości  $p_i = \mathbb{P}(X = a_i)$  dla wszystkich atomów  $a_i \in A$ . Jest to tzw. **funkcja masy prawdopodobieństwa** tej zmiennej. Czasem nazywamy ją po prostu **rozkładem** tej zmiennej losowej dyskretnej.

**Definicja.** Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$  nazywamy funkcję  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

W szczególności dla zmiennej losowej dyskretnej o zbiorze atomów  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$

$$F_X(x) = \sum_{a_i \in A, a_i \leq x} \mathbb{P}(X = a_i).$$

**Definicja.** Wartością oczekiwaną (lub wartością średnią) zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}X = \sum_{a_i \in A} a_i \mathbb{P}(X = a_i).$$

Jeśli szereg po prawej stronie powyższego równania nie jest bezwzględnie zbieżny, mówimy, że wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  nie istnieje.

DODATEK A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

**Zadanie 1.** Zmienna losowa  $X$  posiada rozkład podany w poniższej tabeli

$k$	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	?	$\frac{1}{15}$

Wpisz do tabelki brakującą liczbę i narysuj wykres dystrybuanty tej zmiennej. Znajdź  $\mathbb{P}(2.5 \leq X \leq \pi)$ ,  $\mathbb{P}(X = \pi)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq \pi)$  oraz wylicz  $\mathbb{E}X$ .

**Zadanie 2.** Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której dystrybuanta dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a; \\ \frac{1}{6} & \text{dla } a \leq x < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leq x < 1; \\ \frac{5}{6} & \text{dla } 1 \leq x < b; \\ 1 & \text{dla } x \geq b. \end{cases}$$

**Zadanie 3.** Strzelec ma trzy naboje i strzela do momentu trafienia celu lub do momentu wystrzelenia wszystkich naboji. Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy każdym strzale jest równe 0,8. Liczba wystrzelonych naboji jest zmienną losową  $X$ .

- a) Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa  $X$ .
- b) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tej przestrzeni należące do zdarzeń  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{X = 3\}$  oraz  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 2\} = \{X \leq 2\}$  i wyznacz ich prawdopodobieństwa.
- c) Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej  $X$ .

d) Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 4.** Z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne losujemy trzy kule. Niech  $X$  oznacza liczbę kul czarnych wśród wylosowanej trójki.

- Ile elementów liczy  $\Omega$ ?
- Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej  $X$ .
- Znajdź  $\mathbb{E}X$ .

**Zadanie 5.** Ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  wybieramy losowo trzy różne liczby  $x < y < z$ . Niech  $Y$  będzie zmienną losową oznaczającą środkową z nich.

- Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa  $Y$ .
- Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tej przestrzeni należące do zdarzeń  $\{\omega \in \Omega : Y \leq \sqrt{5}\} = \{Y \leq \sqrt{5}\}$  oraz  $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > 2\} = \{Y > 2\}$  i wyznacz ich prawdopodobieństwa.
- Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej  $Y$ .
- Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej  $Y$ .
- Znajdź  $\mathbb{E}Y$ .

### DODATEK B. ZADANIA DOMOWE

**Zadanie 1.** Podaj rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej, której dystrybuanta dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -5; \\ \frac{1}{6} & \text{dla } -5 \leq x < 1; \\ \frac{1}{3} & \text{dla } 1 \leq x < 4; \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 4 \leq x < 10; \\ 1 & \text{dla } x \geq 10. \end{cases}$$

**Zadanie 2.** Gra „moneta i kostka” polega na rzucie monetą i kostką. W grze tej wygrywamy 4zł w przypadku wyrzucenia reszki i jedyńki, wygrywamy 2zł w przypadku wyrzucenia orła lub parzystej liczby oczek, w pozostałych przypadkach przegrywamy 3zł (tzn. „wygrywamy” minus 3 zł). Podaj przestrzeń probabilistyczną, na której może być określona zmienna losowa  $X$  jaką jest „wygrana”. Podaj rozkład, dystrybuantę i wartość oczekiwaną  $X$ .

**Zadanie 3.** Losujemy dwie kule z urny zawierającej 6 białych, 4 czarne i 2 pomarańczowe kule. Wygrywamy 1zł za każdą kulę czarną, a tracimy 1zł za każdą kulę białą, wyciągając kulę pomarańczową nic nie zarabiamy, ani nic nie tracimy. Niech  $X$  będzie wygraną. Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której może być określona  $X$ . Dla tej przestrzeni wypisz wszystkie zdarzenia elementarne należące do zdarzeń  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{X = 0\}$  oraz  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq -1\} = \{X \leq -1\}$ . Podaj rozkład, dystrybuantę i wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 4.** Sprzedawca encyklopedii jest umówiony z 2 klientami. Szanse na przekonanie pierwszego klienta do zakupu wynoszą 0,3, a drugiego (niezależnie) 0,6. W przypadku każdej sprzedaży jest tak samo prawdopodobne, że klient kupi wydanie deluxe w cenie 1000zł, co wydanie zwykłe w cenie 500zł. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa, dystrybuantę i wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$  będącej łączną kwotą uzyskaną z transakcji z tymi klientami.

**Zadanie 5.** Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 200\}$  wyciągamy losowo 4 różne liczby. Niech  $X$  oznacza największą z nich.

- Na jakiej przestrzeni probabilistycznej zdefiniowana jest zmienna  $X$ ?
- Wyznacz rozkład i wartość oczekiwaną  $X$ .

**Zadanie 6.** Powtarzamy w takich samych warunkach pewne doświadczenie, którego wynikiem może być sukces bądź porażka. Prawdopodobieństwo sukcesu w jednym doświadczeniu wynosi  $p$ ,  $0 < p < 1$ . Zmienna losowa  $X$  jest liczbą prób potrzebnych do osiągnięcia pierwszego sukcesu. Podaj rozkład tej zmiennej losowej.