

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA
WYKŁAD 4: PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE. WZÓR BAYESA.

Twierdzenie (Wzór łańcuchowy). *Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n spełniają warunek $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Twierdzenie. *Jeśli $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{F}$ są podziałem Ω na rozłączne zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ mamy*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i),$$

a dla każdego $j = 1, 2, \dots, k$,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j) \mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}.$$

Pierwsze z powyższych równań nazywamy **wzorem na prawdopodobieństwo całkowite**, a drugie **wzorem Bayesa**.

DODATEK A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

Zadanie 1. Fabryka wytwarza gwoździe na trzech maszynach M_1, M_2 oraz M_3 , których udział w produkcji wynosi odpowiednio 25%, 35% oraz 40%. Maszyny dają odpowiednio 5%, 4% oraz 2% gwoździ wybrakowanych.

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany gwóźdź wyprodukowany w fabryce jest wybrakowany?
- b) Podczas kontroli jakości losowo wybrano gwóźdź, który okazał się być wybrakowany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez maszynę M_1 ?

Zadanie 2. Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem p . Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $1/k$. Jeżeli odpowiedział prawidłowo, to jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź?

Zadanie 3. W pierwszej urnie znajdują się dwie białe i dwie czarne kule, druga zawiera jedną kulę białą i dwie czarne. Z pierwszej urny wyciągamy losowo dwie kule i przekładamy do drugiej urny, z której losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest (a) biała, (b) czarna?

Zadanie 4. W urnie są cztery kule białe i dwie czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny i przemalowano ją na czerwono, wrzucono do urny, a następnie wylosowano następną kulę.

- (a) Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą?
- (b) Przypuśćmy, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę białą. Jaka jest szansa, że przemalowano na czerwono jedną z czarnych kul?

- (c) Przypuśćmy, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę czerwoną. Jaka jest szansa, że przemalowano na czerwono jedną z czarnych kul? Czy otrzymany wynik jest zaskakujący?

Zadanie 5. Bolek i Lolek codziennie kończą pracę niezależnie od siebie, tak by w losowym momencie pomiędzy godziną 17:00 i 17:20 zjawić się na pobliskim przystanku autobusowym, z którego autobus odjeżdża w losowym momencie między 17:00 a 17:10. Pewnego dnia Lolek dociera na przystanek o godz. 17:05 i nie zastaje na nim Bolka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że autobus już odjechał?

DODATEK B. ZADANIA DOMOWE

Zadanie 1. Z urny zawierającej 3 kule białe i pięć czarnych wyciągamy kolejno (bez zwracania) trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kolejno kulę białą, czarną i białą.

Zadanie 2. Trzy grupy ćwiczeniowe, G_1 , G_2 i G_3 , liczą odpowiednio 20, 25 i 20 studentów. W każdej z nich liczba przygotowanych do kartkówki wynosi odpowiednio 8, 10 i 10 studentów. Kartkówkę piszą wszyscy razem. Sprawdzający wybiera losowo pracę jednego studenta. Jakie jest prawdopodobieństwo, że praca należy do studenta z grupy G_1 , jeśli okazało się, że otrzymał on za nią maksimum punktów?

Zakładamy oczywiście, że studenci przygotowani zawsze dostają maksymalną ocenę z kartkówek, natomiast nieprzygotowani studenci nie mają na to żadnych szans.

Zadanie 3. Spośród mężczyzn 5%, a spośród kobiet 0,25% ma daltonizm (tj. nie rozróżnia niektórych kolorów). Wybieramy losowo osobę (zakładamy, że szanse trafienia na mężczyznę i na kobietę są takie same).

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba nie rozróżnia kolorów?
- (b) Wylosowana osoba nie rozróżnia kolorów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

Zadanie 4. Każda z trzech urn zawiera po cztery kule. W i -tej urnie, $i = 1, 2, 3$, jest i kul białych i $4 - i$ kul czarnych. Z losowo wybranej urny (przy czym każda urna jest równoprawdopodobna) losujemy jednocześnie dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane kule będą różnych kolorów? Jeśli wylosowane kule są różnych kolorów, ile wynosi prawdopodobieństwo, że wybraliśmy pierwszą urnę?

Zadanie 5. W urnie są cztery kule białe i dwie czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny, zmieniono jej kolor na ‘przeciwny’, wrzucono z powrotem do urny, a potem wyciągnięto następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą?

Zadanie 6. 60% poczty otrzymywanej przez pewnego internautę stanowi spam. Słowo *viagra* występuje w 5% wiadomości spamowych oraz w 0.01% wiadomości niespamowych. Internauta otrzymał wiadomość zawierającą słowo *viagra* – jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam? Internauta otrzymał wiadomość nie zawierającą słowa *viagra* – jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam?