

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA
WYKŁAD 11: ŁAŃCUCHY MARKOWA. MACIERZ PRZEJŚCIA.

Definicja. Łańcuchem Markowa nazywamy ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \dots$ taki, że dla dowolnych wartości $i_0, i_1, \dots, i_n$

$$\mathbb{P}(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}).$$

Zwykle przyjmujemy, że wszystkie wartości zmiennych losowych X_i należą do **zbioru stanów łańcucha** $S = \{1, 2, \dots, s\}$. Interesować nas będą wyłącznie **jednorodny** łańcuchy Markowa, tzn. takie, w których dla każdego t zachodzi

$$\mathbb{P}(X_t = j | X_{t-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

Definicja. Macierzą przejścia (jednorodnego) łańcucha Markowa nazywamy macierz $\Pi = [p_{ij}]$, gdzie

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j .

Twierdzenie. Niech $\Pi^{(t)} = [p_{ij}^{(t)}]$, gdzie $p_{ij}^{(t)}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach. Wtedy $\Pi^{(t)} = \Pi^t$.

Twierdzenie. Niech $(X_i)_{i=0}^\infty$ będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejścia Π , a $\bar{\rho}^i$ oznacza rozkład zmiennej losowej X_i , dla $i = 0, 1, \dots$. Wtedy dla każdego $k, t = 1, 2, \dots$, zachodzi

$$\bar{\rho}^t = \bar{\rho}^{t-1} \Pi = \bar{\rho}^0 \Pi^{(t)} = \bar{\rho}^0 \Pi^t,$$

a także

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^t \Pi^k.$$

Uwaga Suma wyrazów w każdym z wierszy macierzy Π (oraz Π^t) jest zawsze równa 1.

Definicja. Wektor $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ nazywamy **rozkładem stacjonarnym** łańcucha Markowa o macierzy przejścia $\Pi = [p_{ij}]$, jeśli $\sum_i \pi_i = 1$, $\pi_i \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ i $\bar{\pi} \Pi = \bar{\pi}$.

Twierdzenie. Każdy (jednorodny) łańcuch Markowa (o skończonej liczbie stanów) ma przynajmniej jeden rozkład stacjonarny.

1. ZADANIA NA ĆWICZENIA

Zadanie 1. Problem Ruiny Gracza Macierz przejścia łańcucha Markowa dana jest wzorem

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dla pewnego $p \in (0, 1)$. Dla każdego $t \geq 2$ wylicz p_{24}^t i znajdź $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{24}^t$.

Zadanie 2. Macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa dana jest wzorem:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wiedząc, że $\bar{\rho}^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, wyznacz $\bar{\rho}^1$ oraz $\bar{\rho}^2$.

Oblicz $\Pi^{(2)} = \Pi^2$ i na tej podstawie znajdź $\bar{\rho}^2$ nie obliczając $\bar{\rho}^1$.

Zadanie 3. W pierwszym kapeluszu są 3 kule białe, a w drugim 3 kule czarne. W n -tym doświadczeniu losujemy po jednej kulce z obu kapeluszy i zamieniamy je miejscami. Niech X_n będzie liczbą białych kulek w pierwszym kapeluszu po n doświadczeniach. Wyznacz macierz przejścia dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.

Zadanie 4. Na wierzchołkach trójkąta siedzą 3 robaczki. Robaczki co sekundę mogą przybierać kolor czerwony lub zielony. Polega to na tym, że jeśli robaczek widzi, że oba pozostałe robaczki mają ten sam kolor, to w następnej sekundzie przybierze ich kolor, jeżeli zaś ich kolory są różne, to w następnej sekundzie robaczek z prawdopodobieństwem $1/2$ będzie zielony, a z prawdopodobieństwem $1/2$ – czerwony. Na początku jeden robaczek jest czerwony, a dwa zielone. Zbuduj łańcuch Markowa odpowiadający temu procesowi i podaj jego macierz przejścia, przy założeniu, że:

- ważne jest dla nas dokładne rozłożenie kolorów robaczek na trójkącie, z uwzględnieniem numerów wierzchołków;
- ważna jest dla nas jedynie liczba robaczek w obu kolorach;
- ważne jest dla nas jedynie ile robaczek ma ten sam kolor.

Znajdź rozkład stacjonarny dla przypadku c) i zgadnij jakie są rozkłady stacjonarne w przypadkach a) i b). Czy we wszystkich tych przypadkach istnieje dokładnie jeden stan stacjonarny?

Zadanie 5. Przypuśćmy, że w zadaniu poprzednim robaczki zachowują się inaczej, tzn. gdy robaczek widzi, że pozostałe robaczki są w tym samym kolorze, zmienia swój kolor na tenże z prawdopodobieństwem $2/3$, a z prawdopodobieństwem $1/3$ przyjmuje kolor odmienny. Znajdź trzy macierze przejścia, odpowiadające punktom a), b) i c), a w przypadku c) oblicz rozkład stacjonarny.

2. ZADANIA DOMOWE

Zadanie 1. Macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa dana jest wzorem

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Znajdź p_{13}^2 .
- Przedstaw rozważany łańcuch Markowa za pomocą grafu skierowanego o 5 wierzchołkach.
- Znajdź p_{23}^{100} .
- Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla tego łańcucha po pierwszym kroku, przy założeniu, że rozkładem początkowym łańcucha jest $\bar{p}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{6})$.

Zadanie 2. Znajdź p_{54}^2 , p_{54}^4 i p_{54}^5 dla łańcucha Markowa, którego macierz przejścia dana jest wzorem:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Żaba siedzi nad strumieniem i co minutę z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{3}$ skacze na drugi brzeg, a z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{3}$ nie rusza się z miejsca. Niech X_n będzie położeniem żaby (numerem brzegu strumienia) po n minutach. (X_n) jest zatem łańcuchem Markowa na zbiorze stanów $S = \{1, 2\}$.

- Przedstaw ten łańcuch za pomocą grafu skierowanego, którego wierzchołkami są oba stany, a strzałkom (w tym pętłom) przyporządkowane są odpowiednie prawdopodobieństwa przejścia ze stanu do stanu.

- (b) Wyznacz macierz przejścia Π dla tego łańcucha.
- (c) Załóżmy, że na początku żaba jest na brzegu nr 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 3 minutach znajdzie się na drugim brzegu? Oblicz to prawdopodobieństwo bez podnoszenia do potęgi macierzy Π .
- (d) Oblicz Π^3 i odczytaj z niej p_{12}^3 . Czy wynik jest taki sam, jak w poprzednim podpunkcie?
- (e) Załóżmy, że na początku żaba jest na brzegu nr 1. Wyznacz $\bar{\rho}^1$, $\bar{\rho}^2$ i $\bar{\rho}^3$, czyli rozkłady prawdopodobieństwa dla położenia żaby po 1, 2, 3 minutach.
- (f) Załóżmy, że rozkład początkowy żaby to $\bar{\rho}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tzn. z jednakowym prawdopodobieństwem znajduje się na brzegu 1 i na brzegu 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 3 minutach znajdzie się na brzegu 1?
- (g) Znajdź rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.

Zadanie 4. Łąka przedzielona jest niskim murkiem na część północną i południową. Po przeciwnych stronach murku siedzą dwie ropuchy, Orłoś i Resztko, rzucając co jakiś czas monetą. Gdy wypadnie orzeł, Orłoś przeskakuje przez murek na drugą stronę, jeśli reszka, przez murek przeskakuje Resztko.

- (a) Przedstaw łańcuch Markowa, odpowiadający tej zabawie, za pomocą grafu skierowanego o 4 wierzchołkach.
- (b) Podaj macierz przejścia Π dla tego łańcucha.
- (c) Załóżmy, że na początku obie ropuchy znajdują się po stronie północnej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 5 rzutach monetą obie ropuchy znajdą się na południowej stronie łąki?
- (d) Załóżmy, że na początku obie ropuchy znajdują się po stronie północnej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 12345 rzutach monetą obie ropuchy znajdą się na południowej stronie łąki?
- (e) Znajdź rozkład stacjonarny dla tego łańcucha (jeśli to zadanie uznasz za zbyt trudne, spróbuj go odgadnąć i sprawdzić, że rzeczywiście jest to rozkład stacjonarny).