Teoretyczne podstawy informatyki

Wykłady IX i X. Łańcuchy Markowa. Twierdzenie ergodyczne. Łańcuchy odwracalne.

Wprowadzone pojęcia: łańcuch nieprzywiedlny, łańcuch okresowy, łańcuch ergodyczny, łańcuchy odwracalne.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1. *Każdy łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów ma przynajmniej jeden stan stacjonarny, tzn. istnieje przynajmniej jeden wektor $\pi = [\pi_i]$ o współrzędnych nieujemnych taki, że*

$$\pi = \pi\Pi \quad i \quad \sum_{s \in S} \pi_s = 1\,.$$

Co więcej, jeśli łańcuch jest nieprzywiedlny, każdy stan stacjonarny $\pi = [\pi_i]$ ma wszystkie współrzędne dodatnie.

Twierdzenie 2. *W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa każdy stan ma ten sam okres. W szczególności, jeśli w nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa występuje choć jedna pętla, to łańcuch ten jest nieokresowy.*

Twierdzenie 3. *Każdy nieprzywiedlny i nieokresowy łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów ma dokładnie jeden stan stacjonarny.*

Twierdzenie 4 (Twierdzenie ergodyczne)**.** *Jeśli łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów jest nieprzywiedlny i nieokresowy, to dla dowolnej pary stanów $i, j \in S$*

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j,$$

gdzie $p_{ij}^{(t)}$ jest prawdopobieństwem przejścia ze stanu i do j w t krokach, a π jest jedynym stanem stacjonarnym łańcucha.

Uwaga Proszę zwrócić uwagę, że prawa strona równości w powyższym twierdzeniu nie zależy od i!

Twierdzenie 5. *Jeśli dla łańcucha Markowa o skończonej liczbie stanów istnieje nieujemny, niezerowy wektor $\bar{\pi}$ taki, że dla dowolnej pary stanów $i, j \in S$ zachodzi*

$$p_{ij}\bar{\pi}_i = p_{ji}\bar{\pi}_j,$$

to łańcuch taki nazywamy odwracalnym, a wektor π zdefiniowany równością

$$\pi_i = \frac{\bar{\pi}_i}{\sum_{s\in S}\bar{\pi}_s}$$

jest stanem stacjonarnym tego łańcucha.

Wniosek. *Jeśli dla dowolnej pary stanów $i, j \in S$ zachodzi $p_{ij} = p_{ji}$, tzn. macierz przejścia łańcucha jest symetryczna, tołańcuch ten jest odwracalny, a jednym z jego stanów stacjonarnych jest stan jednorodny π, w którym dla dowolnego $i \in S$ mamy $\pi_i = 1/|S|$.*

Kącik informatyka

Łańcuchy Markowa są jednym z podstawowych narzędzi wspólczesnej informatyki. Jednym z ich standardowych zastosowań są metody Monte-Carlo, gdy musimy wybrać (lub wygenerować) losowo pewien obiekt z danej rodziny obiektów $\mathcal{A}$. Typową metodą postępowania w takiej sytuacji jest wybranie jednego obiektu z $\mathcal{A}$ i jego losowa modyfikacja tak, by otrzymany obiekt wciąż należał do $\mathcal{A}$. Jeśli zrobimy to dostatecznie umiejętnie, po stosunkowo niewielu losowych zmianach otrzymamy obiekt, który, w dobrym przybliżeniu, może być uznany za losowy element rodziny $\mathcal{A}$.