Teoretyczne podstawy informatyki
Wykłady IV, V i VI. Algebraiczna teoria grafów.

Wprowadzone pojęcia: macierz przyległości, wartość własna, wektor własny, ślad macierzy, wielomian charakterystyczny, laplasjan, "oszukana" macierz incydencji, MAX-CUT, drzewo rozpięte.

Przez ν_i oznaczac będziemy wartości własne symetrycznej macierzy H, przez $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ wartości własne A macierzy przyległości A grafu $G = (V, E)$ o $n = |V|$ wierzchołkach, a przez $\mu_n \geqslant \ldots \geqslant \mu_1 = 0$ wartości własne laplasjanu L tego grafu.

Podstawowe twierdzenia

Poniższe twierdzenia prawdziwe są dla każdej rzeczywistej, symetrycznej, kwadratowej macierzy H. W szczególności, są one prawdziwe dla macierzy przyległości A i laplasjanu L.

Twierdzenie 1. *Wartości własne H są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego*

$$W(\lambda) = \det(H - \lambda I)\,,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Twierdzenie 2. *Wszystkie wartości własne macierzy H są rzeczywiste, a odpowiadające im wektory własne mają rzeczywiste współrzędne.*

Twierdzenie 3. *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.*

Twierdzenie 4. *Jeśli macierz H spełnia pewne równanie wielomianowe (np. $H^4 - 3H^3 - 5H^2 + I = 0$), to wszystkie wartości własne ν spełniają to równanie (tzn. mamy wtedy $\nu^4 - 3\nu^3 - 5\nu^2 + 1 = 0$).*

Twierdzenie 5. *Istnieje baza ortogonalna przestrzeni $\mathbb{R}^n$ składająca się z wektorów własnych macierzy A.*

Twierdzenie 6. $\mathrm{Tr}[H^k] = \sum_i \nu_i^k$, *gdzie ν_i oznaczają wartości własne H liczone liczone z odpowiadającymi im krotnościami.*

Twierdzenie 7. *Jeśli C jest macierzą, której kolumnami są wektory bazy ortonormalnej składającej się z wektorów własnych H, a Λ oznacza macierz, na której przekątnej znajdują się wartości własne H, a wszystkie wyrazy poza przekątną są równe zeru, to*

$$\Lambda = C^T H C \quad i \quad H = C \Lambda C^T\,.$$

W szczególności, dla dowolnego k mamy

$$H^k = C \Lambda^k C^T\,.$$

Twierdzenie 8 (Rayleigh-Ritz)**.** *Niech $\lambda_{\max}$ and $\nu_{\min}$ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą wartość własną H. Wtedy*

$$\nu_{\max} = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{v^T H v}{v^T v} = \max_{v \in \mathbb{R}^n, ||v||=1} v^T H v$$

oraz

$$\nu_{\min} = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{v^T H v}{v^T v} = \min_{v \in \mathbb{R}^n, ||v||=1} v^T H v\,.$$

→ *verte*

Wyniki dotyczące macierzy przyległości A i laplasjanu L.

Twierdzenie 9. *Jeśli $B = [b_{ij}] = A^k$, to b_{ij} jest liczbą spacerów w G zaczynających się w wierzchołku i, a kończących się w wierzchołku j.*

Twierdzenie 10. $\mathrm{Tr}[A] = 0$ *i* $\mathrm{Tr}[A^2] = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
$\mathrm{Tr}[L] = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Twierdzenie 11. *$L = MM^T$, gdzie M jest "oszukaną" macierzą incydencji. Z tego faktu wynika, że L jest macierzą półdodatnio określoną czyli wszystkie wartości własne macierzy L są nieujemne.*

Twierdzenie 12. Jeżeli graf G jest d-regularny *to i-ty wektor własny $\vec{v}_i$ laplasjanu L odpowiadającym wartości własnej μ_i jest równocześnie wektorem własnym A odpowiadającym wartości własnej $d - \mu_i$. W szczególności $\mu_i = d - \lambda_i$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Twierdzenie 13. *$MAXCUT \leqslant \mu_n n/4$, gdzie μ_n jest największą wartością własną laplasjanu L.*
W szczególności, **jeśli graf $G = (V, E)$ jest d-regularny,** *to*

$$MAXCUT \leqslant \frac{dn}{4} - \frac{\lambda_n n}{4} = \frac{|E|}{2} - \frac{\lambda_n n}{4},$$

gdzie λ_n jest najmniejszą (zwykle ujemną!) wartością własną A.

Twierdzenie 14 (Kirchoff)**.** *Jeśli liczbę drzew rozpiętych grafu G oznaczymy przez $\tau(G)$, to*

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_2 .$$

$\tau(G)$ możemy również znaleźć licząc minor laplasjanu, tzn. wziąwszy wartość bezwzględną wyznacznika macierzy otrzymanej z laplasjanu przez skreślenie dowolnego wiersza i dowolnej kolumny.

Twierdzenie 15. *Wektor składający się z samych jedynek jest wektorem własnym laplasjanu odpowiadającym wartości własnej 0.*
Wartość własna 0 *jest niezdegenerowaną wartością własną $L(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest spójny.*

Twierdzenie 16. *Jeśli graf G ma dwie składowe G' i G'', to zbiór wszystkich wartości własnych $L(G)$ jest sumą teoriomnogościową zbiorów wartości własnych $L(G')$ i $L(G'')$, gdzie, oczywiście, wartości własne mogą się powtarzać. Co więcej, wektory własne G można znaleźć "uzupełniając w odpowiednich miejscach zerami" wektory własne G' i G''.*
Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla grafów o wielu składowych, a także wtedy, gdy zamiast laplasjanu $L(G)$ rozpatrujemy macierz przyległości $A(G)$.