

Teoretyczne podstawy informatyki.

Wykład III. Skojarzenia. Podstawy teorii złożoności.

Wprowadzone pojęcia: skojarzenie, skojarzenie nasycające zbiór wierzchołków, skojarzenie doskonałe, problemy NP, problemy NP-zupełne.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1 (Hall). *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym o dwupodziale $V = X \cup Y$. Graf G zawiera skojarzenie nasycające wszystkie wierzchołki ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $S \subseteq X$*

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Wniosek (Twierdzenie o małżeństwach). *Każdy dwudzielnym graf k -regularny, gdzie $k \geq 1$, zawiera skojarzenie doskonałe.*

Twierdzenie 2 (Tutte). *Graf $G = (V, E)$ zawiera skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$*

$$o(G \setminus S) \leq |S|,$$

gdzie $o(G \setminus S)$ oznacza liczbę składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków w grafie $G \setminus S$.

Na wykładzie pokazaliśmy po jednej (prostszej) implikacji powyższych twierdzeń.

Kącik informatyka

Problem decyzyjny “Czy graf zawiera skojarzenie doskonałe?” należy oczywiście do klasy NP.

Twierdzenie Tutte’a pokazuje, że należy on również do klasy coNP.

Można jednak pokazać, że jest on nawet w klasie P. Co więcej, istnieje algorytm o wielomianowym czasie działania znajdujący w zadanym grafie ważonym skojarzenie o największej (albo, jeśli Państwo wolą, najmniejszej) wadze. Algorytmy te znacznie się uproszczają, gdy szukamy maksymalnego skojarzenia w grafie dwudzielnym.