Teoretyczne podstawy informatyki
Wykład II. Grafy planarne. Minory. Liczba chromatyczna.

Wprowadzone pojęcia: graf planarny, graf płaski, minor, liczba niezależności, liczba chromatyczna.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1 (Wzór Eulera). *Jeśli G jest grafem płaskim, to $v(G)-e(G)+f(G)-\omega(G)=1$, gdzie $v(G)$, $e(G)$, $f(G)$ i $\omega(G)$ oznaczaj odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian i składowych grafu G.*

Twierdzenie 2 (Kuratowski). *G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera kopii topologicznych grafów $K_{3,3}$ i K_5.*

Twierdzenie 3 (Wagner). *G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy $G \not\trianglerighteq K_5$ i $G \not\trianglerighteq K_{3,3}$.*

Twierdzenie 4 (Chartrand, Harary). *G jest zewnętrznie planarny wtedy i tylko wtedy, gdy $G \not\trianglerighteq K_4$ i $G \not\trianglerighteq K_{2,3}$.*

Hipoteza (Hipoteza Hadwigera). *Jeśli $\chi(G) \geqslant k$, to $G \trianglerighteq K_k$.*

Twierdzenie 5 (Twierdzenie o czterech barwach).
Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.

Kącik informatyka

Twierdzenie 6 (Robertson, Seymour). *Każdą rodzinę grafów domkniętą ze względu na branie minorów można scharakteryzować za pomocą skończonej liczby zakazanych minorów.*

Twierdzenie 7 (Robertson, Seymour). *Dla dowolnego grafu H istnieje stała c_H i algorytm $\mathcal{A}_H$, który w czasie nie większym niż $c_H n^3$ sprawdza, czy ustalony graf na n wierzchołkach zawiera H jako minor.*

Wniosek. *Jeśli $\mathcal{G}$ jest rodziną grafów domkniętą ze względu na branie minorów, to istnieje algorytm, który w czasie $O(n^3)$ sprawdza, czy ustalony graf na n wierzchołkach należy do $\mathcal{G}$. Niemniej, często nie wiemy jak ten algorytm wygląda (bo nie znamy rodziny zakazanych minorów)!*