

Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład I. Obchody Eulera i cykle Hamiltona.

Wprowadzone pojęcia: graf spójny, cykl, obchód Eulera, szlak Eulera, cykl Hamiltona, ścieżka Hamiltona, domknięcie hamiltonowskie grafu, problem chińskiego listonosza, problem podróżującego komiwojażera (TSP).

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1 (Euler). *Spójny graf G ma obchód Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki grafu G mają stopień parzysty.*

Dowód w jedną stronę jest niemal natychmiastowy, dla dowodu w drugą stronę można użyć algorytmu Fleury'ego.

Wniosek. *Spójny graf G ma szlak Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej dwóch, wierzchołki grafu G mają stopień parzysty.*

Twierdzenie 2. *Jeśli graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla każdego $\emptyset \neq S \subseteq V$ mamy*

$$\omega(G \setminus S) \leq |S|,$$

gdzie $\omega(G \setminus S)$ oznacza liczbę składowych w grafie $G \setminus S$.

Twierdzenie 3 (Dirac). *Jeśli $\delta(G) \geq |V|/2$ i $|V| \geq 3$, to graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona.*

Kącik informatyka

Fakt 1. *Istnieje algorytm o wielomianowym czasie działania znajdujący w zadanym grafie ważonym zamknięty spacer o minimalnej wadze, przechodzący przez każdą krawędź przynajmniej raz. Oczywiście, jeśli graf jest eulerowski, wystarczy znaleźć w nim obchód Eulera.*

Fakt 2. *Rozstrzygnięcie, czy zadany graf zawiera cykl Hamiltona jest problemem NP-zupełnym, zatem nie jest znany żaden algorytm, który rozwiązuje go w wielomianowym czasie.*

Fakt 3. *Jeśli przez TSP oznaczmy najmniejszą wagę cyklu Hamiltona w pewnym grafie ważonym G , a przez MST wagę najmniejszego drzewa rozpiętego w tym grafie, to*

$$TSP \geq MST.$$

Jeśli ponadto wagi w grafie G spełniają warunek trójkąta, to zachodzi również:

$$TSP \leq 2MST.$$

Szczypta historii

Leonhard Euler sformułował swoje twierdzenie w 1736 roku, w odpowiedzi na opublikowaną w gazecie łamigłówkę (zwaną obecnie “problemem siedmiu mostów królewieckich”), zatem jego wynik można uznać za najstarsze twierdzenie dotyczące grafów. Euler podał jego dowód tylko w jedną stronę, pierwszy pełen (algorytmiczny!) dowód równoważności pochodzi od Carla Hierholzera z roku 1873. Algorytm podany przez M. Fleury’ego został opublikowany nieco później, w 1883 roku.

Problem chińskiego listonosza postawił chiński matematyk i informatyk Meigu Guan (albo Mei-Ku Kuan) w 1960 roku, w czasie rewolucji kulturalnej w Chinach, gdy naukowcy byli bardzo stanowczo zachęceni do stawiania i rozwiązywania problemów o praktycznym zastosowaniu.

Cykl Hamiltona zawdzięcza swą nazwę łamigłówce wymyślonej w 1857 roku przez sir Williama Rowana Hamiltona – wybitnego uczonego, który m.in. wprowadził do matematyki tzw. kwaterniony. Polegała ona na tym, by dopełnić do cyklu Hamiltona zadaną ścieżkę o pięciu wierzchołkach w grafie dwunastościanu. Jej pomysł sprzedał dwa lata później za 25 funtów pewnemu producentowi gier imieniem Jacques, który reklamował ją jako *Podróż dookoła świata*. W jego wersji dwadzieścia wierzchołków dwunastościanu symbolizowało dwadzieścia różnych miast, zaczynających się na 20 różnych liter alfabetu, od B do Z.