

TPI – 6
Metody algebraiczne w teorii grafów – laplasjany

Zadania na ćwiczenia

Zad.1. Korzystając ze spektrum macierzy przyległości, wyznaczonego na poprzednich ćwiczeniach dla grafu Petersena:

- (a) Wyznacz spektrum laplasjanu tego grafu.
- (b) Oblicz dla tego grafu liczbę wszystkich drzew rozpiętych.
- (c) Wyznacz MAXCUT.

Zad.2. Znajdź liczbę drzew rozpiętych w grafie $K_{2,3}$:

- (a) licząc minor laplasjanu.
- (b) wprost, licząc wszystkie drzewa.

Zad.3. Sprawdź, czy oszacowanie na MAXCUT dla K_n daje dokładny wynik.

Zad.4. Dobra wróżka zdradziła nam pierwszy wiersz laplasjanu L pewnego grafu oraz 6 liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy L .

- (a) Wyznacz liczbę drzew rozpiętych w rozważanym grafie.
- (b) Oszacuj z góry i z dołu liczbę krawędzi w największym cięciu tego grafu.

Pierwszy wiersz macierzy L : $[3 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1]$

wektory własne: $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

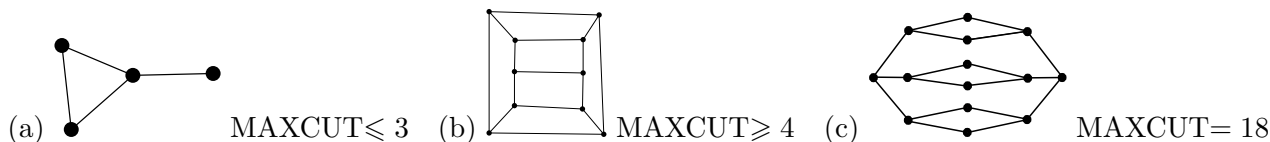
Zad.5. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

- (a) Jedną z wartości własnych laplasjanu każdego 5-regularnego grafu dwudzielnego jest 10.
- (b) Jeżeli $v(G) = 6$, $e(G) = 9$ i czterema z sześciu wartości własnych jego laplasjanu są: 2, 2, 4 i 4, to G ma co najwyżej 4^3 drzew rozpiętych.
- (c) Jeżeli główna przekątna laplasjanu wygląda tak: 7,6,7,6,8,6,6,6,7,7,8,8,6, to graf posiada skojarzenie doskonałe.

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki, która odbędzie się dopiero 25 kwietnia!

ZOT jest nieobowiązkowy; zainteresowani oddają na ćwiczeniach jego pisemne rozwiązanie.

A1. Czy dla zaprezentowanych grafów prawdziwe jest podane oszacowanie na MAXCUT?



A2. Czy dla grafów z poprzedniego zadania prawdziwe jest podane oszacowanie na liczbę drzew rozpiętych? (a) $\tau(G) = 3$ dla pierwszego grafu; (b) $\tau(G) \leq 3$ dla drugiego grafu; (c) $\tau(G) \geq 3$ dla trzeciego grafu.

A3.

- Wyznacz spektrum laplasjanu grafu $K_{n,n}$.
- Znajdź liczbę wszystkich drzew rozpiętych grafu $K_{n,n}$. Sprawdź otrzymany wynik, licząc drzewa kombinatorycznie dla $n = 2$ i $n = 3$.
- Sprawdź, czy szacowanie na MAXCUT dla grafu $K_{n,n}$ daje dokładny wynik.

A4. Demon zastąpił niektóre liczby z podanego laplasjanu grafu G znakami zapytania.

- Uzupełnij laplasjan.
- Wyznacz liczbę drzew rozpiętych w tym grafie, obliczając minor laplasjanu.
- Narysuj graf G .

$$\begin{bmatrix} 2 & ? & -1 & 0 \\ -1 & ? & 0 & ? \\ -1 & ? & ? & -1 \\ ? & ? & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A5.

- Jakiemu parametrowi grafu G jest równy ślad jego laplasjanu?
- Jakiemu parametrowi grafu G jest równa suma wartości własnych jego laplasjanu?
- Znajdź liczbę drzew rozpiętych w grafie G o 5 wierzchołkach i sześciu krawędziach, wiedząc, że cztery z pięciu wartości własnych jego laplasjanu to: 0, 2, 2 i 3.

A6. Oto spektrum macierzy przyległości pewnego grafu 3-regularnego G : 3,1,1,1,1,1,-2,-2,-2,-2. Ile jest wszystkich drzew rozpiętych w G ?

A7. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

- Jeżeli na przekątnej laplasjanu grafu G są same piątki, to pięć jest wartością własną macierzy przyległości grafu G .
- Istnieje graf, dla którego spektrum laplasjanu wygląda tak: 5,5,3,3,0,-1,-1.
- Istnieje graf, dla którego spektrum laplasjanu wygląda tak: 5,5,3,3,1,1,1,1.
- Jeżeli w spektrum laplasjanu grafu jest więcej niż jedno zero, to graf ten nie ma drzew rozpiętych.
- Jeżeli graf jest spójny, to w spektrum laplasjanu jest dokładnie jedno zero.
- Jeżeli spektrum laplasjanu grafu G wygląda tak: 4,4,4,4,4,4,0,0, to $e(G) \leq 15$.

ZOT 3. Oto uszkodzony laplasjan pewnego grafu (niektóre liczby zastąpiono znakami zapytania). Oszacuj jak najlepiej potrafisz z góry i z dołu liczbę drzew rozpiętych w tym grafie. Punkty otrzymają autorzy najlepszych oszacowań, o ile oczywiście oba ich oszacowania będą poprawne i przekonująco uzasadnione.

$$\begin{bmatrix} 2 & ? & ? & ? & 0 \\ ? & 3 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & -1 & ? \\ ? & 0 & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Niech G będzie „trójkątem z ogonkiem”, tzn. jedynym grafem o czterech wierzchołkach z ciągiem stopni $(3, 2, 2, 1)$. Wiadomo, że trzy z czterech wartości własnych laplasjanu tego grafu wynoszą 0, 3 i 4. Znajdź czwartą wartość własną i rozwiązując odpowiedni układ równań znajdź odpowiadający jej wektor własny.

B2. Graf G ma 6 wierzchołków i 9 krawędzi, a pięć z sześciu wartości własnych jego laplasjanu to: 0, 2, 2, 4 i 4. Znajdź górne oszacowanie na MAXCUT w tym grafie.

B3.

- Jakie liczby całkowite na pewno są wartościami własnymi laplasjanu dwudzielnego grafu 8-regularnego?
- Jakie liczby całkowite na pewno nie są wartościami własnymi laplasjanu dwudzielnego grafu 8-regularnego?
- G jest dwudzielnym grafem 8-regularnym o 32 wierzchołkach. Wyznacz wartości własne laplasjanu grafu G (wraz z krotnościami), wiedząc, że ma on 3 różne wartości własne.

B4. Niech G będzie grafem o ciągu stopni $(3, 3, 2, 2)$, tzn. G jest cyklem o długości 4 z jedną przekątną.

- Znajdź, nie korzystając z żadnych wzorów, liczbę $\tau(G)$ drzew rozpiętych grafu G .
- Znajdź $\tau(G)$, obliczając minor laplasjanu G .
- Dobra wróżka powiedziała, że wektorami własnymi laplasjanu grafu G są: $(-2, 0, 1, 1)$, $(-1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, gdzie pierwsze dwie współrzędne odpowiadają wierzchołkom o stopniu trzy. Znajdź wszystkie wartości własne laplasjanu.
- Znajdź $\tau(G)$, korzystając z własności własnych znalezionych w poprzednim podpunkcie.

B5. Dane jest spektrum laplasjanu pewnego 2-regularnego grafu G : $3, 3, 3, 3, 0, 0$. Narysuj graf G (i uzasadnij, że z dokładnością do izomorfizmu nie ma innych).

B6. Spektrum laplasjanu pewnego 3-regularnego grafu G wygląda tak: $0, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5$. Ile cykli o długości 3 zawiera G ?

B7. Oto laplasjan L pewnego grafu G , o którym wiadomo, że największej wartości własnej macierzy L odpowiada wektor $(1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Oszacuj z góry jak najlepiej potrafisz MAXCUT dla tego grafu G .

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

B8.

- Założmy, że znamy spektrum i bazę wektorów własnych dla laplasjanu każdej składowej niespójnego grafu G . Jak wyznaczyć szybko spektrum i bazę wektorów własnych dla laplasjanu grafu G ?
- Wyznacz spektrum i bazę wektorów własnych laplasjanu grafu złożonego z wierzchołkowo rozłącznych K_3 i C_4 oraz z wierzchołka izolowanego.

B9. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeb, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem. W wszystkich podpunktach wartości własne dotyczą macierzy przyległości rozważanego grafu,

- Istnieje niepusty graf, dla którego wszystkie wartości własne laplasjanu są takie same.
- Istnieje graf 3-regularny, dla którego spektrum laplasjanu wygląda tak: $5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 0, 0$.
- Jeżeli największa wartość własna laplasjanu grafu jest mniejsza od 8, a w grafie istnieje cięcie liczące 100 krawędzi, to graf ten ma przynajmniej 50 wierzchołków.
- Jeżeli laplasjan grafu G jest macierzą 10×10 i ma same 5 na przekątnej, to G jest nieplanarny.

B10. Macierz przyległości A pewnego 3-regularnego grafu na 10 wierzchołkach spełnia równanie:

$$A^2 + A - 2I - J = 0.$$

Wyznacz wszystkie wartości własne laplasjanu L i znajdź liczbę drzew rozpiętych dla tego grafu.

B11. Założmy, że graf G o 50 wierzchołkach jest 7-regularny. Ponadto macierz przyległości A tego grafu spełnia równanie:

$$A^2 = J - A + 6I,$$

J oznacza macierz złożoną z samych jedynek, a I jest macierzą jednostkową. Wyciągnij jak najwięcej informacji o grafie G , dotyczących:

- liczby drzew rozpiętych,
- oszacowania MAXCUT z dołu i z góry.