

Zadania domowe, przygotowujące do kartkówki

We wszystkich zadaniach A oznacza macierz przyległości rozważanego w zadaniu grafu. Przez przekątną macierzy rozumiemy jej główną przekątną.

A1. Dla grafu K_3 :

- (a) Wyznacz A^2 , A^3 i A^4 . Na tej podstawie oblicz ślady macierzy A^2 , A^3 i A^4 .
- (b) Korzystając ze spektrum (czyli ciągu wszystkich wartości własnych, z uwzględnieniem ich krotności) wyznaczonego dla K_3 w zadaniu domowym z poprzedniej listy, sprawdź dla $k = 2, 3, 4$, że rzeczywiście $\text{Tr}(A^k)$ (wyznaczone w poprzednim podpunkcie) jest sumą k -tych potęg wartości własnych.

A2. Uzasadnij, że nie istnieją grafy, dla których spektrum macierzy przyległości jest następujące:

- (a) $2, 2, 1, 1, -3, -3, -3$; (b) $\sqrt{20}, 4, 2, 0, -3, -3, -\sqrt{20}$; (c) $2, 2, 0, 0, -4$.

A3. Dla ścieżki o 3 wierzchołkach:

- (a) Wyznacz wszystkie wartości własne jej macierzy przyległości, ani nie rozwiązując równania $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, ani nie korzystając z wielomianu charakterystycznego. Proszę wykorzystać własności wartości własnych podane na wykładzie oraz fakt, że ścieżka jest grafem dwudzielnym.
- (b) Wyznacz bazę ortogonalną wektorów własnych dla A .

A4. Wyznacz bazę ortonormalną dla macierzy przyległości trójkąta (czyli K_3).

A5. Wyznacz bazę ortonormalną dla macierzy $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (To nie szkodzi, że B nie jest macierzą przyległości.)

A6. Spróbuj znaleźć bazę składającą się z wektorów własnych macierzy $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i skomentuj swoje wysiłki mając w pamięci Twierdzenie 5 podane w wypisach z wykładu.

A7. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeby, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem.

- (a) Istnieje graf na 3 wierzchołkach, którego macierz przyległości ma spektrum: $-2, 0, 2$.
- (b) W spektrum dwudzielnego grafu 4-regularnego występuje liczba 4.
- (c) W spektrum dwudzielnego grafu 5-regularnego występuje liczba -5 .
- (d) Istnieje graf dwudzielny, którego macierz przyległości ma spektrum: $-2, -2, -2, -1, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2$.
- (e) Istnieje graf, dla którego wszystkie wartości własne są takie same.
- (f) Istnieje graf, którego najmniejsza wartość własna jest dodatnia.
- (g) Istnieje graf 3-regularny, którego spektrum wygląda tak: $2, 2, 2, 0, 0, \dots, 0, 0, -3, -3$.

A8. Załóżmy, że I, J są macierzami 4×4 , przy czym J składa się z samych jedynek, I jest macierzą jednostkową.

- (a) Dla jakiego grafu macierz $B = J - I$ jest macierzą przyległości?
- (b) Wyznacz $B\bar{1}$ dla wektora $\bar{1}$ złożonego z samych jedynek.

(c) Wyznacz $J\bar{x}$ dla wektora $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

(d) Załóżmy, że $\bar{x}$ jest prostopadły do wektora $\bar{1}$ złożonego z samych jedynek (to znaczy iloczyn skalarny tych dwóch wektorów wynosi 0). Uzasadnij, że $J\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zadania na ćwiczenia**Zad.1.** (rozgrzewka przed kolejnymi zadaniami)

Założmy, że I, J są macierzami $n \times n$ ($n \geq 1$), przy czym J składa się z samych jedynek, I jest macierzą jednostkową. Niech $B = J - I$.

- (a) Czy macierz B jest macierzą przyległości jakiegoś grafu?
- (b) Wyznacz $B\bar{1}$ dla wektora $\bar{1}$ złożonego z samych jedynek.
- (c) Wyznacz $J\bar{x}$ dla wektora $\bar{x}$ o współrzędnych $x_1, \dots, x_n$.
- (d) Załóżmy, że $\bar{x}$ jest prostopadły do wektora $\bar{1}$ złożonego z samych jedynek. Wyznacz $J\bar{x}$.

Zad.2. Dla $n \geq 2$, korzystając z równania macierzowego, jakie spełnia macierz przyległości grafu K_n , wyznacz spektrum macierzy A .

Zad.3. Dla $n, m \geq 2$, znajdź równanie macierzowe, jakie spełnia macierz przyległości grafu $K_{n,m}$ i wyznacz spektrum macierzy A .

Zad.4. Macierz przyległości A pewnego 7-regularnego grafu G o 50 wierzchołkach spełnia równanie:

$$A^2 = J - A + 6I,$$

gdzie J oznacza macierz złożoną z samych jedynek, a I jest macierzą jednostkową. Wyciągnij jak najwięcej informacji o grafie G , dotyczących:

- (a) dwudzielności,
- (b) planarności,
- (c) liczby cykli długości trzy, jakie G takie zawiera,
- (d) liczby cykli długości pięć, jeśli G takie zawiera.

Zad.5. Zauważ, że graf Petersena nie zawiera trójkątów, a oprócz tego każda para wierzchołków jest albo połączona krawędzią, albo połączona dokładnie jedną ścieżką o długości dwa. Korzystając z tych własności znajdź odpowiednie równanie na A i wyznacz spektrum tego grafu.

Ciekawostka: Jeśli graf k -regularny ma powyższą własność, to k musi przyjmować jedną z czterech wartości 2, 3, 7 i 57. Jedyna znana metoda dowodu tego faktu to rozwiązanie odpowiedniego równania na wartości własne macierzy przyległości i pokazanie, że dla innych wartości k spektrum takiego grafu nie istnieje (zachęcamy, żeby spróbować to zrobić samodzielnie). Wiemy, że istnieją takie grafy dla $k = 2$ (cykl C_5), $k = 3$ (graf Petersena) i $k = 5$ (tzw. graf Hoffmana-Singletona na 50 wierzchołkach, który badaliśmy w poprzednim zadaniu). Do dzisiaj nie wiemy czy istnieje taki graf dla $k = 57$ (jeśli tak, to ma on $57^2 + 1 = 3250$ wierzchołków).

Zadania do samodzielnego rozwiązania później

B1. Dlaczego jeśli spektrum macierzy przyległości grafu G jest symetryczne, to G jest dwudzielny? Zainteresowanych życiem grafów zachęcamy do ambitniejszego zadania: uzasadnienia, że prawdziwa jest również zależność w drugą stronę (co wiemy z wykładu).

B2. Na podstawie wyznaczonej w zadaniu z poprzedniej listy macierzy A^4 dla grafu K_n i na podstawie wyznaczonego na ćwiczeniach spektrum grafu K_n sprawdź, że rzeczywiście $\text{Tr}(A^4) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4$.

B3. Macierz przyległości A grafu H o 12 wierzchołkach spełnia równanie: $A^2 = 4A + 5I$. Wyznacz spektrum grafu H .

B4. Macierz przyległości A pewnego 10-regularnego grafu na 20 wierzchołkach spełnia równanie

$$A^2 = 10J - 10A.$$

Wyciągnij jak najwięcej wniosków o spektrum macierzy A . Przypominamy, że J oznacza macierz, której wszystkie wyrazy są jedynkami.

B5. Oceń poprawność każdego z poniższych zdań. W każdym przypadku poprzyj odpowiedź, w zależności od potrzeb, uzasadnieniem ogólnym, przykładem lub kontrprzykładem. W wszystkich podpunktach wartości własne dotyczą macierzy przyległości rozważanego grafu,

- (a) Jeżeli graf 4-regularny jest niespójny, to w spektrum grafu wartość własna 4 ma krotność przynajmniej 2.

- (b) Jeżeli graf 4-regularny ma 3 składowe, to w jego spektrum wartość własna 4 ma krotność co najmniej 3.
- (c) Jeżeli w spektrum grafu G największa wartość własna ma krotność 1, to graf G jest niespójny.
- (d) Jeżeli dla grafu G na 10 wierzchołkach wszystkie wyrazy na przekątnej macierzy A^2 wynoszą 4, to G jest spójny.
- (e) Jeżeli dla grafu G zachodzi $A^2 = A + 2I$, to G posiada cykl nieparzysty.

B6. Znajdź wartości własne i ortonormalny system wektorów własnych dla macierzy przyległości grafu K_2 . Korzystając z tej bazy, wyznacz A^k dla dowolnego $k \geq 1$.

B7. Korzystając z wyznaczonej w zadaniu domowym bazy ortogonalnej macierzy przyległości grafu K_3 , wyznacz A^{123} .

B8. Wyznacz wartości własne i ortonormalny system wektorów własnych dla grafu G na pięciu wierzchołkach, który ma dwie składowe: jedną izomorficzną z K_3 i drugą izomorficzną z K_2 . Korzystając z tej bazy, wyznacz A^{100} .

B9. Znajdź liczbę wszystkich spacerów o długości 100 w ścieżce o trzech wierzchołkach, które zaczynają się w jednym końcu ścieżki i kończą w drugim końcu ścieżki

- (a) kombinatorycznie
- (b) używając ortonormalnej lub ortogonalnej bazy wektorów własnych i własności, że $A = C\Lambda C^{-1}$.

B10. Załóżmy, że spektrum macierzy przyległości grafu H składa się z następujących 50 wartości własnych:

- jednokrotna wartość 7,
- 28-krotna wartość 2,
- 21-krotna wartość -3 .

Wyciągnij jak najwięcej informacji o grafie H , dotyczących:

- (a) dwudzielnosci,
- (b) planarności,
- (c) liczby cykli długości trzy, jakie H zawiera.
- (d) liczby cykli nieparzystych, jakie H zawiera.