

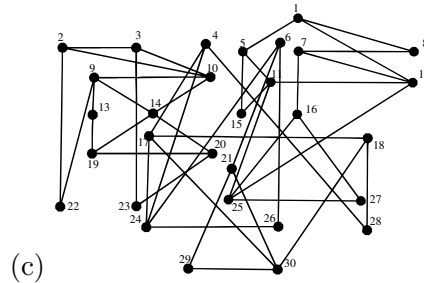
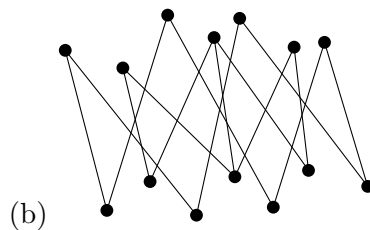
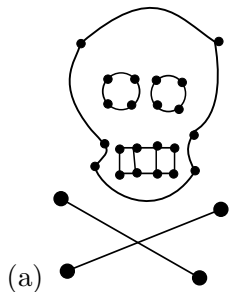
TPI – 0
Rozgrzewka grafowa

Pojęcia, które nie powinny być Państwu obce:

- graf
- graf pełny K_n , pusty, trywialny, ścieżka P_n , cykl C_n
- stopień wierzchołka, minimalny/maksymalny stopień grafu, graf regularny
- dopełnienie G^c grafu
- podgraf, podgraf indukowany, podgraf rozpięty
- spójność, składowe
- drzewo, las
- izomorfizm grafów
- dwudzielność

Zad.1. W przypadku każdego z poniższych grafów oceń:

- Czy jest regularny?
- Czy jest dwudzielny?
- Czy jest spójny?
- Ile posiada składowych?



Zad.2. Definiujemy graf G ruchów skoczka szachowego na szachownicy 6×6 tak: Każde pole szachownicy jest wierzchołkiem grafu, a dwa pola (wierzchołki) x, y są przyległe w G wtedy i tylko wtedy, gdy skoczek postawiony na x może w jednym ruchu przeskoczyć na y .

Czy graf G jest (a) regularny? (b) dwudzielny? (c) spójny?

Zad.3.

- (a) Ile krawędzi ma drzewo o n wierzchołkach? Ile krawędzi ma graf K_n ?
- (b) Narysuj drzewo na 4 wierzchołkach, którego dopełnienie jest drzewem.
- (c) Dla jakich n istnieje drzewo o n wierzchołkach, którego dopełnienie jest drzewem?
- (d) Dla jakich n istnieje las o n wierzchołkach, którego dopełnienie jest lasem?

Zad.4. Dlaczego w każdym grafie suma stopni jest parzysta?

Zad.5. Oto definicja n -kostki Q_n ($n \in \mathbb{N}$): wierzchołkami są wszystkie ciągi binarne długości n , a krawędź między dwoma ciągami wstawiamy wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi te różnią się na dokładnie jednym bicie.

- (a) Ile wierzchołków ma graf Q_n ?
- (b) Ilu sąsiadów ma każdy wierzchołek? Dlaczego?
- (c) Ile krawędzi ma Q_n ?

Zad.6.

- (a) Ile jest wszystkich grafów na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\}$?
- (b) Lisek Chytrusek napisał program generujący wszystkie grafy na zadanych 10 wierzchołkach. Na komputerze liska program ten generuje grafy z prędkością 1 mln grafów na sekundę. Ile (z grubsza) czasu zajmie mu wygenerowanie wszystkich grafów na 10 wierzchołkach?

Zad.7. Zbadaj, czy podane na końcu listy grafy są izomorficzne. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego, jeśli tak – wskaż izomorfizm. Proszę zbadać tylko pary: 1,2,6.

Zad.8. (rezerwowe) Czy k -kostka jest grafem (a) spójnym? (b) dwudzielnym?

B1. Narysuj graf, który

- (a) zawiera ścieżkę P_5 (czyli ścieżkę o 5 wierzchołkach) jako podgraf, cykl C_5 jako podgraf, a ponadto graf ten ma dokładnie 3 składowe. Jaka jest najmniejsza liczba wierzchołków takiego grafu?
- (b) jest 4-regularny, a jego dopełnienie zawiera graf pełny K_6 jako podgraf.

B2.

- (a) Narysuj 5 różnych cykli o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ile jest wszystkich takich cykli?
- (b) Narysuj 5 różnych drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, 3, 4\}$. Ile jest wszystkich takich drzew?

B3. Ile krawędzi ma graf

- (a) będący dopełnieniem grafu 4-regularnego na 123 wierzchołkach?
- (b) dwudzielny o dwupodziale (X, Y) , w którym $|X| = 80$ a każdy wierzchołek ze zbioru X ma stopień 2?

B4. Pewną zdrową społeczność kosmici postanowili zarazić paskudnym wirusem. Wirus szerzy się tak, że każdy chory zaraża wszystkich swoich znajomych, a chorzy nigdy nie zdrowieją. Kosmici chcieliby wiedzieć, jaka jest najmniejsza liczba ludzi, których zarażenie sprawi, że po jakimś czasie wszyscy będą chorzy. Zinterpretuj problem w języku grafów: jaki parametr grafowy interesuje kosmitów?

B5. Na przyjęciu 9-osobowym zapytano uczestników, z iloma obecnymi osobami przywitali się. Dwie osoby powiedziały, że z dwoma, trzy – z trzema, a cztery – z czterema. Uzasadnij, że nie wszyscy powiedzieli prawdę.

B6. Czy w każdym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta?

B7. Czy istnieje graf

- (a) o 6 wierzchołkach i stopniach wierzchołków odpowiednio: 1, 2, 3, 3, 4, 4?
- (b) o 6 wierzchołkach i stopniach wierzchołków odpowiednio: 1, 2, 2, 3, 5, 5?
- (c) o 5 wierzchołkach, który jest drzewem, a jego dopełnienie jest lasem?

B8. Niech $Q_n^{(2)}$ dla $n \geq 2$ będzie grafem, którego wierzchołkami są wszystkie ciągi binarne długości n , a krawędź między dwoma ciągami wstawiamy wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi te różnią się na dokładnie dwóch bitach.

- (a) Ilu sąsiadów ma każdy wierzchołek?
- (b) Ile krawędzi ma $Q_n^{(2)}$?
- (c) Czy $Q_3^{(2)}$ jest spójny?
- (d) Czy $Q_3^{(2)}$ jest dwudzielny?
- (e) Czy $Q_n^{(2)}$ jest spójny dla jakiegoś $n \geq 3$?
- (f) Czy $Q_n^{(2)}$ jest dwudzielny dla jakiegoś $n \geq 3$?

B9. Narysuj wszystkie parami nieizomorficzne drzewa o 6 wierzchołkach.

B10. Zbadaj, czy podane (na końcu listy) grafy są izomorficzne. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego, jeśli tak – wskaż izomorfizm. Proszę zbadać wszystkie pary nie zbadane na ćwiczeniach.

B11. Na pewnej wyspie każde miasto ma bezpośrednie połączenie lotnicze z co najwyżej trzema innymi miastami, a z każdego miasta jest możliwość podróży samolotem do każdego innego miasta z co najwyżej jedną przesiadką. Interesuje nas, ile najwięcej miast może znajdować się na tej wyspie.

- (a) Przedstaw interpretację grafową tego problemu.
- (b) Narysuj mapę wyspy z jak największą potrafisz liczbą miast spełniających warunki zadania.
- (c) Rozwiąż problem, tzn. wyznacz szukaną największą liczbę miast.

B12. G jest skończoną grupą witających się osób, w której są przynajmniej dwie osoby. Nie wszyscy muszą się przywitać ze wszystkimi. Czy zawsze znajdziemy w takiej grupie dwie osoby, które przywitały się z tą samą liczbą ludzi? Przetłumacz problem na język grafów (i rozwiąż).

Które z podanych par grafów są izomorficzne?

