Rachunek prawdopobieństwa: rozgrzewka przed drugim kolokwium

1. Zmienna losowa (X, Y) ma dystrybuantę daną wzorem

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \geqslant 0.5 \text{ i } y \geqslant 2, \\ 8x^3 & \text{gdy } x \in (0, 0.5) \text{ i } y \geqslant 2, \\ y^2/4 & \text{gdy } x \geqslant 0.5 \text{ i } y \in (0,2), \\ 2y^2x^3 & \text{gdy } x \in (0, 0.5) \text{ i } y \in (0,2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

   i) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
   ii) Oblicz $\mathrm{P}(1 \leqslant Y \leqslant 5)$ i $\mathrm{Var}X$.

2. Gęstość zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4x & \text{gdy } x \in (0,1) \text{ i } x^2 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

   i) Znajdź gęstości brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$.
   ii) Znajdź współczynnik korelacji

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X\,\mathrm{Var}Y}}.$$

   iii) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
   iv) Znajdź rozkład zmiennej losowej $U = XY^3$.
   v) Oblicz $F_{X,Y}(2, 1/2)$.

3. W urnie znajdują się 2 kule białe, 2 kule czarne i 2 kule czerwone. Z urny losujemy równocześnie 3 kule. Niech X oznacza liczbę wylosowanych kul czarnych, a Y liczbę wylosowanych kul białych.
   i) Znajdź współczynnik korelacji

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X\,\mathrm{Var}Y}}.$$

   ii) Znajdź rozkład zmiennej losowej $Z = \mathbb{E}(X|Y)$.

4. Znajdź rozkład stacjonarny łańcucha Markowa o macierz przejścia:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Czy łańcuch ten jest odwracalny? Jeżeli odpowiedź jest negatywna zaproponuj sposób odróżnienia zapisu stanów łańcucha od "odwróconego" zapisu stanów łańcucha.

5. W pierwszym kapeluszu są 3 kule białe, a w drugim 3 kule czarne. W n–tym doświadczeniu, losujemy po jednej kulce z obu kapeluszy i zamieniamy je miejscami. Niech X_n będzie liczbą białych kulek w pierwszym kapeluszu po n doświadczeniach. Wyznacz macierz przejścia dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ i znajdź jego rozkład stacjonarny.Czy łańcuch ten jest ergodyczny? Czy jest odwracalny?

6. Cztery robaczki świętojańskie, mogące świecić na dwa kolory, siedzą naokoło okrągłej miseczki zmieniając kolor co sekundę w następujący sposób. Każdy robaczek przybiera z prawdopodobieństwem 2/3 kolor robaczka siedzącego po prawej stronie, a z prawdopodobieństwem 1/3 kolor robaczka siedzącego po stronie lewej.
   i) Znajdź macierz przejścia dla tego łańcucha, zakładając, że robaczki nie są rozróżnialne (macierz taka ma sześć różnych stanów).
   ii) Czy ten łańcuch jest odwracalny?
   iii) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla tego łańcucha.

   Wskazówka do polecenia (iii): Zanim przystąpią Państwo do liczenia, warto przez chwilę pomyśleć.

verte $\longrightarrow$

6. Rozpatrzmy proces gałązkowy generowany przez zmienną losową X o rozkładzie
$$\Pr(X = 0) = a,\ \Pr(X = 2) = 1/3,\ \Pr(X = 3) = 2/3 - a,$$
gdzie $0 < a < 2/3$. Znajdź zależność od parametru a prawdopobieństwa $\eta(a)$, że proces wymrze.
7. Zaproponuj algorytm, oparty na łańcuchach Markowa, który generuje rodzinę S **rozłącznych** podzbiorów dwuelementowych zbioru $[n] = \{1, 2, , \ldots, n\}$ taki, ae (w stanie stacjonarnym) każdy podzbiór występuje z tym samym prawdopodobieństwem. Nastepnie wprowadź do niego zmiany, tak by każdy podzbiór zawierający s rozłącznych dubletonów występował z prawdopobieństwem proporcjonalnym do 3^s.