Rachunek prawdopobieństwa: rozgrzewka przed pierwszym kolokwium

Zadanie 1. W brydża gra czterech graczy oznaczanych jako W, N, E i S. W rozdaniu talia 52 kartowa zostaje podzielona między nich losowo tak, by każdy z nich otrzymał po 13 kart. Znajdź prawdopodobieństwa następujących zdarzeń.

(i) Gracz W otrzyma dwie damy i trzy piki.
(ii) Przynajmniej jeden z graczy otrzyma dwie damy i trzy piki.
(iii) Gracz N otrzyma co najmniej jednego króla i co najwyżej dwa kara.
(iv) Żaden z graczy nie otrzyma dokładnie jednego króla.

Zadanie 2. Pierwsza urna zawiera 3 białe i 2 czarne kule, a w drugiej znajdują się 1 biała, 1 czarna i 1 czerwona kula. Z pierwszej urny wybieramy losowo dwie kule i wrzucamy je do urny drugiej. Następnie z drugiej urny wylosowujemy naraz trzy kule. Znajdź prawdopodobieństwo, że z pierwszej urny wybraliśmy dwie białe kule, jeśli wiemy, że z urny drugiej wyciągnęliśmy jedną kulę białą, jedną czarną i jedną czerwoną kulę.

Zadanie 3. Basia i Kasia umówiły się na karmelowe macchiato w pobliskiej kawiarni, ale nie ustaliły dokładnej godziny spotkania. Basia przychodzi do kawiarni w losowym momencie pomiędzy 12:00 a 13:00, a Kasia w losowym momencie pomiędzy 12:30 a 13:15. Po przyjściu każda z nich będzie czekała na przyjaciółkę 10 minut.

Niech S oznacza zdarzenie, że obie przyjaciółki się spotkają, K zdarzenie, że Kasia przyszła na spotkanie przed Basią. Oblicz $\mathbb{P}(S)$, $\mathbb{P}(K)$ i $\mathbb{P}(K|S)$. Czy zdarzenia S i K są niezależne?

Zadanie 4. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ x^3/3 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 1/3 & \text{dla } x \in [1,2) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 2. \end{cases}$$

(i) Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej $Y = X^2$.
(ii) Wylicz wariancję $\mathrm{Var}X$.

Zadanie 5. Gęstość zmiennej losowej dana jest wzorem

$$f_X(x) = \begin{cases} x^3/4 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $Y = X^{1/4}$.

Zadanie 6. Rzucamy kostką tak długo, dopóki na kostce nie będzie co najmniej trzech oczek. Niech X oznacza liczbę rzutów. Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = e^X$.