

## Zadania przygotowujące do kolokwium 25 stycznia 2024

**Zadanie 1.** Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma dystrybuantę daną wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \geq 0.5 \text{ i } y \geq 2, \\ 8x^3 & \text{gdy } x \in (0, 0.5) \text{ i } y \geq 2, \\ y^2/4 & \text{gdy } x \geq 0.5 \text{ i } y \in (0, 2), \\ 2y^2x^3 & \text{gdy } x \in (0, 0.5) \text{ i } y \in (0, 2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne?
- (b) Oblicz  $P(1 \leq Y \leq 5)$  i  $\text{Var}X$ .

**Zadanie 2.** Ze zbioru  $\{0, 1, 2\}$  wylosowujemy parę różnych liczb  $\{a, b\}$ , przy czym każda z trzech możliwych par losowana jest z tym samym prawdopodobieństwem. Niech  $X = a + b$  i  $Y = a \cdot b$ .

- (a) Znajdź łączny rozkład zmiennej losowej  $(X, Y)$  i rozkłady brzegowe zmiennych  $X$  i  $Y$ .
- (b) Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne?
- (c) Oblicz współczynnik korelacji  $\rho(X, Y)$ .
- (d) Wylicz  $\mathbb{E}(X^2 + 2XY^3)$ .
- (e) Znajdź rozkład zmiennej losowej  $Z = \mathbb{E}(Y|X)$  i oblicz  $\mathbb{E}Z$ .

**Zadanie 3.** Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma gęstość

$$f_{X,Y} = \begin{cases} 12x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

- (a) Znajdź gęstości (brzegowe)  $X$  i  $Y$ .
- (b) Czy  $X$  and  $Y$  są niezależne?
- (c) Oblicz współczynnik korelacji  $\rho(X, Y)$ .
- (d) Znajdź rozkład zmiennej losowej  $Z = X^2Y$ .

**Zadanie 4.** Rozpatrzmy proces gałązkowy, w którym liczba potomków każdej z cząstek dana jest zmienną losową  $X$  o rozkładzie:

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X = 3) = 1/4, \quad \Pr(X = 1) = a, \quad \Pr(X = 2) = 1/2 - a.$$

gdzie  $a \in [0, 1/2]$  jest pewnym parametrem. Znajdź zależność prawdopodobieństwa  $\eta$ , że proces wymrze, od parametru  $a$ .

**Uwaga:** Warto pamiętać, że dla dowolnej funkcji tworzącej  $G(s)$  mamy  $G(1) = 1$ .

**Zadanie 5.** Znajdź rozkład stacjonarny łańcucha Markowa o macierz przejścia:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Czy łańcuch ten jest odwracalny? Jeżeli odpowiedź jest negatywna zaproponuj sposób odróżnienia zapisu stanów łańcucha od “odwrotnego” zapisu stanów łańcucha.

**Zadanie 6.** Jeżyk Anatol spędza całe dnie wylegując się pośród trzech, rosnących w ogrodzie, drzew. Co kwadrans decyduje o kolejnym miejscu odpoczynku. Jeśli siedzi pod jabłką, z prawdopodobieństwem  $1/2$  przechodzi pod gruszę, a z prawdopodobieństwem  $1/2$  pod śliwą. Gdy siedzi pod gruszą, na następne miejsce pobytu z równym prawdopodobieństwem  $1/3$  wybiera jabłką, śliwę lub gruszę. Siedząc pod śliwą, z prawdopodobieństwem  $1/3$  zostaje na miejscu, a z prawdopodobieństwem  $2/3$  idzie pod gruszę. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że po 300 kwadransach cierpliwego Anatola znajdzie się pod gruszą? Błąd przybliżenia jest nieistotny.

**Zadanie 7.** Cztery robaczki świętojańskie, mogące świecić na dwa kolory, siedzą naokoło okrągłej miseczki zmieniając kolor co sekundę w następujący sposób. Każdy robaczek przybiera z prawdopodobieństwem  $2/3$  kolor robaczka siedzącego po prawej stronie, a z prawdopodobieństwem  $1/3$  kolor robaczka siedzącego po stronie lewej.

- i) Znajdź macierz przejścia dla tego łańcucha, zakładając, że robaczki nie są rozróżnialne (macierz taka ma sześć różnych stanów).
- ii) Czy ten łańcuch jest odwracalny?
- iii) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla tego łańcucha.

**Wskazówka do polecenia (iii):** Zanim przystąpią Państwo do liczenia, warto przez chwilę pomyśleć.