Rachunek Prawdopodobieństwa.
Wektory losowe.

Dowolną funkcję mierzalną $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ nazywamy **zmienną losową dwuwymiarową**, lub, czasami, **dwuwymiarowym wektorem losowym**. Współrzędne tej funkcji, X i Y, są „zwykłymi" zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilitycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dla takiego wektora (X, Y) **dystrybuanta** $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leqslant x, Y \leqslant y\right) .$$

Aby otrzymać dystrybuanty zmiennych X i Y mając daną dystrybuantę łączną $F_{X,Y}$ należy skorzystać ze wzorów:

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x, y) ,$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x, y) .$$

Definicja. *Zmienne losowe X i Y są* **niezależne***, jeśli dla każdej pary $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) .$$

Twierdzenie. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$ i funkcji $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mamy*

$$\mathbb{E}(af(X, Y) + bg(X, Y) + c) = a\mathbb{E}f(X, Y) + b\mathbb{E}g(X, Y) + c.$$

Definicja. Kowariancją *zmiennej losowej (X, Y) nazywamy liczbę*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y,$$

a **współczynnik korelacji** *$\rho(X, Y)$ zdefiniowany jest wzorem*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X}\sqrt{\mathrm{Var}\, Y}} .$$

Uwaga: Istnieją zmienne losowe (X, Y), dla których $\mathrm{Cov}(X, Y)$ i $\rho(X, Y)$ nie są określone, ponieważ bo definiująca je całka lub szereg nie sa zbieżne! Jesli jednak $\rho(X, Y)$ istnieje, to $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$.

Twierdzenie. *Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, a zatem $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.*

Uwaga: Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe.

Rozpatrzmy teraz osobno przypadki zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych.

Definicja. *Jeśli miara generowana w* $\mathbb{R}^2$ *przez wektor losowy* $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ *jest czysto atomowa, tzn. istnieją co najwyżej przeliczalne zbiory* $\{x_1,x_2,\dots\}$ *i* $\{y_1,y_2,\dots\}$ *takie, że*

$$\sum_i\sum_j \mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)=1\,,$$

to (X,Y) *nazywamy dwuwymiarową zmienną dyskretną o atomach* $\{(x_i,y_j):i,j=1,2,\dots\}$.

Definicja. Rozkład (łączny), *lub* **funkcję masy prawdopodobieństwa**, *zmiennej losowej* (X,Y) *definiujemy podając wszystkie wartości*

$$p_{i,j}=\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)\,.$$

Wtedy $\sum_{i,j}p_{i,j}=1$.

Definicja. Rozkłady brzegowe *zmiennych* X *i* Y *obliczamy za pomoca wzorów*

$$\mathbb{P}\left(X=x_i\right)=\sum_j\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)$$

i

$$\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)=\sum_i\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)\,.$$

Twierdzenie. *Zmienna losowe dyskretne* X *i* Y *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla* **wszystkich** *wartości* (x_i,y_j) *zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)=\mathbb{P}\left(X=x_i\right)\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)\,.$$

Twierdzenie (Prawo leniwego statystyka). *Niech* (X,Y) *będzie zmienną losową dyskretną o wartościach (atomach)* $\{(x_i,y_j):i,j=1,2,\dots\}$ *i* $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *będzie funkcją mierzalną, wtedy*

$$\mathbb{E}(g(X,Y))=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right).$$

Zatem, np.

$$\mathbb{E}(XY)=\sum_{i,j}x_iy_j\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)\,.$$

Definicja. *Jeśli dystrybuanta* $F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x,Y\leqslant y\right)$ *zmiennej losowej dwuwymiarowej* $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$, *daje się zapisać jako*

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(s,t)dtds\,,$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, *to zmienną losową* (X,Y) *nazywamy* **(absolutnie) ciągłą**, *a funkcję* $f_{X,Y}$ **gęstością** *zmiennej losowej* (X,Y). *Wtedy*

$$f_{X,Y}(s,t)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{x=s,t=y}\,,$$

dla prawie wszystkich wartości (s,t).

Zauważmy, że wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(s,t)dsdt=1\,.$$

Jeśli (X,Y) jest (absolutnie) ciągła, to gęstość i dystrybuantę zmiennych losowych X i Y znajdujemy ze wzorów

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,t)dt\,,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(s,y)ds\,.$$

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa* (X,Y) *jest (absolutnie) ciągła, to zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)\,,$$

dla **prawie wszystkich** x **i** y, *tzn. dla* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$, *gdzie* B *jest zbiorem miary zero.*

Twierdzenie (Prawo leniwego statystyka)**.** *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa* (X,Y) *ma gęstość* $f_{X,Y}$*, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej)* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} g(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s,t) f_{X,Y}(s,t) dt ds\,,$$

czyli, np.

$$\mathbb{E}(X^2 Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s,t) dt\,.$$