

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA.
WEKTORY LOSOWE.

Funkcję mierzalną $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy **zmienną losową dwuwymiarową**, lub, czasami, **dwuwymiarowym wektorem losowym**. Współrzędne tej funkcji, X i Y , są „zwykłymi” zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dla takiego wektora (X, Y) **dystrybuanta** $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) .$$

Aby otrzymać dystrybuanty zmiennych X i Y mając daną dystrybuantę łączną $F_{X,Y}$ należy skorzystać ze wzorów:

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) ,$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) .$$

Definicja. Zmienne losowe X i Y są **niezależne**, jeśli dla każdej pary $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) .$$

Twierdzenie. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$ i funkcji $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbb{E}(af(X, Y) + bg(X, Y) + c) = a\mathbb{E}f(X, Y) + b\mathbb{E}g(X, Y) + c.$$

Definicja. **Kowariancją** zmiennej losowej (X, Y) nazywamy liczbę

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y,$$

a współczynnik korelacji $\rho(X, Y)$ zdefiniowany jest wzorem

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X}\sqrt{\text{Var } Y}} .$$

Uwaga: Istnieją zmienne losowe (X, Y) , dla których $\text{Cov}(X, Y)$ i $\rho(X, Y)$ nie są określone, ponieważ bo definiująca je całka lub szereg nie są zbieżne! Jeśli jednak $\rho(X, Y)$ istnieje, to $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

Twierdzenie. Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, a zatem $\text{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.

Uwaga: Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe.

Rozpatrzmy teraz osobno przypadki zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych.

Definicja. Jeśli miara generowana w $\mathbb{R}^2$ przez wektor losowy $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest czysto atomowa, tzn. istnieją co najwyżej przeliczalne zbiory $\{x_1, x_2, \dots\}$ i $\{y_1, y_2, \dots\}$ takie, że

$$\sum_i \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1,$$

to (X, Y) nazywamy dwuwymiarową zmienną dyskretną o atomach $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \dots\}$.

Definicja. Rozkład (łączy) lub funkcję masy prawdopodobieństwa, zmiennej losowej (X, Y) definiujemy podając wszystkie wartości

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Wtedy $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$.

Definicja. Rozkłady brzegowe zmiennych X i Y obliczamy za pomocą wzorów

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

i

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Twierdzenie. Zmienna losowa dyskretna X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich wartości (x_i, y_j) zachodzi

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Twierdzenie (PRAWO LENIWEGO STATYSTYKA). Niech (X, Y) będzie zmienną losową dyskretną o wartościach (atomach) $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \dots\}$ i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, wtedy

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Zatem, np.

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Definicja. Jeśli dystrybuenta $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, daje się zapisać jako

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds,$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, to zmienną losową (X, Y) nazywamy (**absolutnie**) **ciągłą**, a funkcję $f_{X,Y}$ **gęstością** zmiennej losowej (X, Y) . Wtedy

$$f_{X,Y}(s, t) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=s, t=y},$$

dla prawie wszystkich wartości (s, t) .

Zauważmy, że wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) ds dt = 1.$$

Jeśli (X, Y) jest (absolutnie) ciągła, to gęstość i dystrybuentę zmiennych losowych X i Y znajdujemy ze wzorów

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t) dt,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, y) ds.$$

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa (X, Y) jest (absolutnie) ciągła, to zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y),$$

dla prawie wszystkich x i y , tzn. dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$, gdzie B jest zbiorem miary zero.

Twierdzenie (PRAWO LENIWEGO STATYSTYKA). *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}g(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, t) f_{X,Y}(s, t) dt ds,$$

czyli, np.

$$\mathbb{E}(X^2 Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s, t) dt.$$