

Definicja. Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ jest σ -algebrą (lub σ -ciałem) zdarzeń, a $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ jest miarą probabilistyczną spełniającą warunki:

- (A) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (B) Jeśli $A_1, A_2, \dots$, są parami rozłączne, to

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i).$$

Przykład 1 (KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA). Jeśli Ω jest zbiorem skończonym, to $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$, gdzie

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

jest przestrzenią probabilistyczną.

Przykład 2 (GEOMETRYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA). Jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ o skończonej mierze, $\mathcal{F}$ jest przestrzenią zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, $\lambda(\cdot)$ jest miarą Lebesgue'a, a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)},$$

to $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną.

Twierdzenie 1 (WŁASNOŚCI MIARY PROBABILISTYCZNEJ).

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- (iii) Jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- (iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- (v) wzór włączeń i wyłączeń

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots A_{i_n}).$$

- (vi) nierówność Boole'a: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ i $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Definicja. Mówimy, że zdarzenia $\{A_j : j \in J\}$ są **niezależne**, gdy dla dowolnego skończonego podzbioru I zbioru indeksów J zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (*)$$

Jeśli równość $(*)$ jest spełniona tylko dla dwuelementowych podzbiorów I , wtedy mówimy, że rodzina zdarzeń $\{A_j : j \in J\}$ jest **parami niezależna**.

Definicja. Niech $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ będą dwoma przestrzeniami probabilistycznymi. **Iloczynem (produktem)** tych przestrzeni nazywamy przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie zbiory typu $A_1 \times A_2$, gdzie $A_1 \in \mathcal{F}_1$ i $A_2 \in \mathcal{F}_2$, oraz dla takiej pary zbiorów mamy

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1) \cdot \mathbb{P}_2(A_2).$$

W podobny sposób definiujemy iloczyn większej (skończonej lub przeliczalnej) rodziny przestrzeni probabilistycznych.

Definicja. Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest przestrzenią probabilistyczną, a $B \in \mathcal{F}$ jest zdarzeniem, dla którego $\mathbb{P}(B) > 0$, wtedy możemy skonstruować **przestrzeń warunkową** $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$ przyjmując

$$\mathcal{F}_B = \{F \cap B : F \in \mathcal{F}\},$$

a dla każdego $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_B(A)$ zwykle zapisujemy jako $\mathbb{P}(A|B)$ i czytamy jako **prawdopodobieństwo (warunkowe) zdarzenia A pod warunkiem (zajścia) zdarzenia B** .

Uwaga. Jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{ i } \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B),$$

zakładając, że $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, bo inaczej prawdopodobieństwa warunkowe nie są dobrze zdefiniowane.

Twierdzenie 2 (WZÓR ŁAŃCUCHOWY). Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ spełniają warunek $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Twierdzenie 3. Jeśli $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{F}$ są podziałem Ω na rozłączne zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i),$$

a dla każdego $j = 1, 2, \dots, k$,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j) \mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)}.$$

Pierwsze z powyższych równań nazywamy WZOREM NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE, a drugie WZOREM BAYESA.

Lemat 4 (LEMATY BORELA-CANTELLIEGO). Niech $A_1, A_2, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń, a $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ oznacza zdarzenie, że zachodzi nieskończenie wiele spośród nich.

- (i) Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, to $\mathbb{P}(B) = 0$.
- (ii) Jeśli ponadto zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są **niezależne** i $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, wtedy $\mathbb{P}(B) = 1$.