

Definicja. Zmienną losową nazywamy **prostą** gdy przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne. W tej części materiału rozpatrywać będziemy wyłącznie takie zmienne.

Definicja. Funkcją tworzącą prostej zmiennej losowej X nazywamy funkcję $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowaną wzorem

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X = i).$$

Twierdzenie 1 (WŁASNOŚCI FUNKCJI TWORZĄCYCH). Jeśli G_X jest funkcją tworzącą prostej zmiennej losowej X , to

- (i) $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ i $G_X(1) = 1$,
- (ii) G_X jest ciągła i wypukła,
- (iii) $G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}X(X-1)\dots(X-k+1)$, gdzie $G_X^{(k)}(1)$ oznacza k -tą lewostronną pochodną funkcji G_X w punkcie 1.
- (iv) Jeśli zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, to

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s)G_{X_2}(s)\dots G_{X_n}(s).$$

Twierdzenie 2. Niech G_X i G_N będą funkcjami tworzącymi prostych zmiennych losowych X i N . Ponadto niech S będzie sumą N niezależnych zmiennych losowych $X_1, \dots, X_N$, z których każda ma rozkład taki, jak zmienna losowa X . Wtedy funkcja tworząca zmiennej losowej S dana jest wzorem

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)).$$

Definicja. Procesem gałązkowym generowanym przez prostą zmienną losową X nazywamy ciąg zmiennych losowych $Z_0, Z_1, \dots$ takim, że $\mathbb{P}(Z_0 = 1) = 1$, a dla $n \geq 1$

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{i,n},$$

gdzie $X_{i,n}$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej X .

Ponieważ $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ nie maleje z n granica

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

zawsze istnieje i nazywamy ją **prawdopodobieństwem wymarcia procesu**.

Twierdzenie 3. Niech X będzie prostą zmienną losową, dla której $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, G będzie funkcją tworzącą X , a η będzie prawdopodobieństwem wymarcia procesu gałązkowego generowanego przez X .

- (i) Jeśli $\mathbb{E}X \leq 1$, to $\eta = 1$.
- (ii) Jeśli $\mathbb{E}X > 1$, to $\eta < 1$ jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $G(s) = s$.