

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA.
WARUNKOWA WARTOŚĆ OCZEKIWANA I MARTYNGAŁY.

W tej części notatek wszystkie rozpatrywane zmienne losowe są dyskretne (analogiczne pojęcia można zdefiniować dla zmiennych losowych bez tego dodatkowego założenia, ale jest to nieco dłuższe i bardziej skomplikowane).

Definicja. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową ciągłą. Warunkową funkcją gęstości $f_{Y|X}(y|x)$ nazywamy funkcję

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} & \text{gdy } f_X(x) \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } f_X(x) = 0, \end{cases}$$

a warunkową wartością oczekiwaną $E(Y|X)$ nazywamy zmienną losową $\psi(X)$, gdzie

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy.$$

Definicja. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową dyskretną, a $\{x_i\}_{i \in I}$ zbiorem atomów o mierze niezerowej zmiennej losowej X . Wtedy **warunkowa wartość oczekiwana** $Z = E(Y|X)$ jest zmienną losową, która dla dowolnego $\omega \in \Omega$ takiego, że $X(\omega) = x_i$ przyjmuje wartość

$$Z(\omega) = E(Y|X = x_i) = \sum_y y \mathbb{P}(Y = y|X = x_i) = \sum_y y \frac{\mathbb{P}(Y = y, X = x_i)}{\mathbb{P}(X = x_i)}.$$

Innymi słowy, $E(Y|X) = \psi(X)$, gdzie

$$\psi(x) = E(Y|X = x) = \sum_y y \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \sum_y y \frac{\mathbb{P}(Y = y, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

Nietrudno zauważyć (i udowodnić!), następujący fakt.

Twierdzenie. $E(E(Y|X)) = EY$.

Zauważmy, że (przynajmniej dla zmiennych losowych dyskretnych) rozkład zmiennej losowej $E(Y|X)$ zależy wyłącznie od zmiennej losowej Y i podziału jaki generuje zmienna X dzieląc przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω na zdarzenia o niezerowej mierze. Dlatego często warunkową wartość oczekiwaną wprowadzamy w sposób następujący.

Definicja. Niech $\mathcal{F} = F_1 \cup F_2 \cup \dots$ będzie podziałem przestrzeni Ω na co najwyżej przeliczalną liczbę zdarzeń, z których każde ma niezerową miarę, a $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zmienną losową określoną na tej przestrzeni. Wtedy **warunkowa wartość oczekiwana** $Z = E(X|\mathcal{F})$ jest zmienną losową przyjmującą wartość

$$Z(\omega) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x|F_i) = \sum_x x \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap F_i)}{\mathbb{P}(F_i)}$$

dla wszystkich $\omega \in F_i$.

Definicja. Filtracją przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ jest ciąg podziałów tej przestrzeni $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ na zdarzenia o niezerowej mierze taki, że

- i) $\mathcal{F}_0 = \{\Omega\}$,
- ii) dla każdego $i = 1, 2, \dots, t$, podział $\mathcal{F}_i$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{F}_{i-1}$, tzn. każde zdarzenie należące do $\mathcal{F}_i$ jest podzbiorem pewnego zdarzenia należącego do $\mathcal{F}_{i-1}$.

Definicja. Niech X będzie zmienną losową, a $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ będzie filtracją przestrzeni Ω . Wtedy ciąg zmiennych losowych

$$X_0 = E(X|\mathcal{F}_0), X_1 = E(X|\mathcal{F}_1), \dots, X_t = E(X|\mathcal{F}_t)$$

nazywamy **martyngałem Dooba**.

Zauważmy, że jeśli $X_0, X_1, \dots, X_t$ jest martyngałem Dooba generowanym przez zmienną losową X , to $X_0 \equiv \mathbb{E}X$ (tzn. $\mathbb{P}(X_0 = \mathbb{E}X) = 1$) i dla każdego $i = 1, 2, \dots, t$, mamy

$$X_{i-1} = \mathbb{E}(X_i | X_{i-1}) = \mathbb{E}(X | X_{i-1}).$$

Martyngał Dooba jest szczególnym przypadkiem martyngału.

Definicja. Ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \dots$ jest **martyngałem** jeśli dla każdego $n \geq 0$ zachodzi

- $\mathbb{E}|X_n| < \infty$,
- $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = X_n$.

Podstawowym twierdzeniem dotyczącym martyngałów jest następujące twierdzenie o zbieżności.

Twierdzenie. Jeśli $X_0, X_1, X_2, \dots$ jest martyngałem takim, że dla pewnej stałej C mamy $\mathbb{E}X_n^2 \leq C$ dla $n \geq 0$, to istnieje taka zmienna losowa X , że $X_n \xrightarrow{p.n.} X$ i $X_n \xrightarrow{2} X$.