

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA
ŁAŃCUCHY MARKOWA.

Definicja. Łańcuchem Markowa nazywamy ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \dots$ taki, że dla dowolnych wartości $i_0, i_1, \dots, i_n$

$$\mathbb{P}(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}) .$$

Zwykle przyjmujemy, że wszystkie wartości zmiennych losowych X_i należą do **zbioru stanów łańcucha** $S = \{1, 2, \dots, s\}$. Interesować nas będą wyłącznie **jednorodny** łańcuchy Markowa, tzn. takie, w których dla każdego t zachodzi

$$\mathbb{P}(X_t = j | X_{t-1} = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) .$$

Definicja. Macierzą przejścia (jednorodnego) łańcucha Markowa nazywamy macierz $\Pi = [p_{ij}]$, gdzie

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j .

Twierdzenie. Niech $\Pi^{(t)} = [p_{ij}^{(t)}]$, gdzie $p_{ij}^{(t)}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach. Wtedy $\Pi^{(t)} = \Pi^t$.

Twierdzenie. Niech $(X_i)_{i=0}^\infty$ będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejścia Π , a $\bar{\rho}^i$ oznacza rozkład zmiennej losowej X_i , dla $i = 0, 1, \dots$. Wtedy dla każdego $k, t = 1, 2, \dots$, zachodzi

$$\bar{\rho}^t = \bar{\rho}^{t-1} \Pi = \bar{\rho}^0 \Pi^{(t)} = \bar{\rho}^0 \Pi^t ,$$

a także

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^t \Pi^k .$$

Uwaga Suma wyrazów w każdym z wierszy macierzy Π (oraz Π^t) jest zawsze równa 1.

Definicja. Wektor $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ nazywamy **rozkładem stacjonarnym** łańcucha Markowa o macierzy przejścia $\Pi = [p_{ij}]$, jeśli $\sum_i \pi_i = 1$, $\pi_i \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ i $\bar{\pi} \Pi = \bar{\pi}$.

Twierdzenie. Każdy (jednorodny) łańcuch Markowa (o skończonej liczbie stanów) ma przynajmniej jeden rozkład stacjonarny.

Definicja. Łańcuch Markowa nazywamy **nieprzywiedlnym**, lub **nieredukowalnym** gdy z niezerowym prawdopodobieństwem z każdego stanu możemy przejść do każdego innego, być może w kilku krokach, tzn. gdy dla dowolnych stanów i, j istnieje takie t , że $p_{ij}(t) > 0$.

Definicja. Okresem stanu i łańcucha Markowa nazywamy największy wspólny dzielnik liczb ze zbioru $\{t : p_{ii}(t) > 0\}$. Jeśli okresy wszystkich stanów łańcucha są równe jeden to łańcuch nazywamy **nieokresowym**, w przeciwnym razie łańcuch ten jest **okresowy**.

Twierdzenie. W łańcuchu nieprzywiedlnym wszystkie stany mają ten sam okres.

Definicja. Nieprzywiedlny i nieokresowy łańcuch Markowa nazywamy **ergodycznym**.

Twierdzenie (TWIERDZENIE ERGODYCZNE). Każdy (jednorodny) ergodyczny łańcuch Markowa (o skończonej liczbie stanów) ma dokładnie jeden stan stacjonarny $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ i dla każdej pary stanów i, j zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j .$$

Twierdzenie. Jeśli dla dowolnych dwóch stanów i, j pewnego łańcucha Markowa zachodzi

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

gdzie $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, $\pi_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ i $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$, to łańcuch taki nazywamy **odwracalnym**, a $\bar{\pi}$ jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.