

Definicja. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ dąży do zmiennej losowej X według rozkładu (lub słabo), co zapisujemy

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

gdy ciąg dystrybuant F_n zmiennych losowych X_n dąży do dystrybuanty F zmiennej losowej X w każdym punkcie ciągłości F .

Definicja. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa (lub według miary albo X_n jest zbieżny stochastycznie do X), co zapisujemy

$$X_n \xrightarrow{P} X,$$

gdy dla każdego $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

Definicja. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ dąży do zmiennej losowej X z prawdopodobieństwem jeden (lub prawie na pewno), co zapisujemy

$$X_n \xrightarrow{p.n.} X,$$

gdy

$$\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

Definicja. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ dąży do zmiennej losowej X względem momentów rzędu r , co zapisujemy

$$X_n \xrightarrow{r} X,$$

gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r \rightarrow 0.$$

Twierdzenie 1.

- (i) Jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$, to $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Jeśli ponadto X jest funkcją stałą, tzn. $\mathbb{P}(X = c) = 1$, to zbieżność $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ pociąga zbieżność $X_n \xrightarrow{P} c$.
- (ii) Jeśli $X_n \xrightarrow{p.n.} X$, to $X_n \xrightarrow{P} X$.
- (iii) Jeśli $X_n \xrightarrow{P} X$, to istnieje podciąg X_{n_i} taki, że $X_{n_i} \xrightarrow[p.n.]{} X$.
- (iv) Jeśli $r \geq s \geq 1$ i $X_n \xrightarrow{r} X$, to $X_n \xrightarrow{s} X$.
- (iv) Jeśli $X_n \xrightarrow{s} X$ dla pewnego $s \geq 1$, to $X_n \xrightarrow{P} X$.

Twierdzenie 2 (SŁABE PRAWO WIELKICH LICZB). Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takim, że $\mathbb{E}X_i = \mu$ i $\mathbb{E}X_i^2 = \sigma^2$. Ponadto, niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Wtedy, dla każdego $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0,$$

czyli

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Dowód: Teza wynika natychmiast z nierówności Czebyszewa. □

Twierdzenie 3 (CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE). *Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych takim, że $\mathbb{E}X_i = \mu$ i $\mathbb{E}X_i = \sigma^2 > 0$. Ponadto, niech*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Wtedy, dla każdego rzeczywistej stałej a ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} < a \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-t^2/2} dt,$$

czyli

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

gdzie $\mathcal{N}(0, 1)$ jest zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym.

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje funkcje charakterystyczne.

Definicja. Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Twierdzenie 4 (WŁASNOŚCI FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ). *Niech $\phi_X(t)$ będzie funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X .*

- (i) $\phi_X(0) = 1$ i $|\phi_X(t)| \leq 1$ dla $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\phi_X(t)$ jest ciągła w każdym punkcie.
- (iii) Jeśli dla pewnego naturalnego k mamy $\mathbb{E}|X|^k < \infty$, to

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^k \frac{\mathbb{E}(X^j)}{j!} (it)^j + o(t^k),$$

stąd $\phi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$.

- (iv) Jeśli zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, to

$$\phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \phi_{X_2}(t) \cdots \phi_{X_n}(t).$$

Twierdzenie 5 (TWIERDZENIE O CIĄGŁOŚCI). *Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o funkcjach charakterystycznych $\phi_1, \phi_2, \dots$.*

- (i) Jeśli $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, to ciąg $\phi_n(t)$ jest zbieżny w każdym punkcie do funkcji charakterystycznej $\phi_X(t)$ zmiennej losowej X .
- (ii) Jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ istnieje granica

$$\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$$

i funkcja $\phi(t)$ jest ciągła w zerze, to $\phi(t)$ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X i $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

W szczególności, dystrybuenta zmiennej losowej X jest jednoznacznie wyznaczona przez jej funkcję charakterystyczną $\phi(t)$.

Uwaga. Zamiast funkcji charakterystycznej czasami możemy stosować **funkcję tworzącą momenty** zdefiniowaną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Ma ona tę zaletę, że jej przeciww dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, niemniej ma ona również istotną wadę, która, w wielu przypadkach, czyni ją bezużyteczną – dla niektórych zmiennych losowych $M_X(t)$ nie istnieje dla żadnego $t \neq 0$!