

Zastosowania grafów w bioinformatyce. Wypisy z wykładów.

Wykład VII. Przepływy w sieciach.

Wprowadzone pojęcia: Sieć, źródło, ujście, przepływ w sieci, cięcie, wartość przepływu, pojemność cięcia.

Podstawowe definicje i twierdzenia

Definicja. Wartością przepływu f , oznaczaną jako $w(f)$, nazywamy sumę wartości przepływu na strzałkach wychodzących ze źródła. Równoważnie można ją zdefiniować jako sumę wartości przepływu na strzałkach dochodzących do ujścia.

Definicja. Pojemnością cięcia (S, \bar{S}) , oznaczaną jako $cap(S, \bar{S})$, nazywamy sumę pojemności strzałek wychodzących z S , tzn. strzałek o początku w S i końcu w \bar{S} .

Podstawowym twierdzeniem teorii przepływów jest rezultat łączący maksymalny przepływ z minimalnym cięciem w sieci.

Twierdzenie (MAX-FLOW-MIN-CUT).

$$\max_f w(f) = \min_{(S, \bar{S})} cap(S, \bar{S}),$$

gdzie maksimum jest wzięte po wszystkich przepływach, a minimum po wszystkich cięciach w sieci.

Zauważmy, że jeśli f_{\max} jest maksymalnym przepływem, a $(S_{\min}, \bar{S}_{\min})$ minimalnym cięciem, to na każdej strzałce wychodzącej z S_{\min} przepływ f_{\max} jest taki jak pojemność tej strzałki, a na każdej strzałce wchodzącej do S_{\min} przepływ f_{\max} wynosi zero.

Okazuje się, że maksymalny przepływ można dość szybko znaleźć.

Fakt. Istnieją algorytmy, które w czasie wielomianowym znajdują maksymalny przepływ w sieci.

Co więcej, większość z tych algorytmów ma następującą własność, kluczową dla wielu zastosowań:

jeśli pojemność każdej strzałki w sieci jest liczbą całkowitą, to znaleziony maksymalny przepływ na każdej strzałce przyjmuje wartości całkowite.