Zastosowania grafów w bioinformatyce. Wypisy z wykładów.
Wykład VI. Łańcuchy Markowa

Wprowadzone pojęcia: przestrzeń stanów, łańcuch Markowa, macierz przejścia, łańcuch nieredukowalny, łańcuch okresowy, rozkład stacjonarny, odwracalne łańcuchy Markowa.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1. *Niech $\Pi = [p_{ij}^{(k)}]$ będzie macierzą przejścia, $\Pi^{(k)} = [p_{ij}^{(k)}]$ macierzą przejścia w k krokach, a $\mu^{(n)} = [\mu_i^{(n)}]$ rozkładem zmiennej losowej X_n dla łańcucha Markowa $X_0, X_1, \ldots$. Wtedy*

$$\Pi^{(k)} = \Pi^k,$$

i

$$\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)}\Pi,$$

a ogólniej

$$\mu^{(n+k)} = \mu^{(n)}\Pi^{(k)} = \mu^{(n)}\Pi^k.$$

Twierdzenie 2. *Każdy nieredukowalny i nieokresowy łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów ma dokładnie jeden stan stajonarny, tzn. istnieje dokładnie jeden wektor $\pi = [\pi_i]$ o współrzędnych nieujemnych taki, że*

$$\pi = \pi P \quad i \quad \sum_i \pi_i = 1\,.$$

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Ergodyczne)**.** *Jeśli łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów jest nieredukowalny i nieokresowy, to dla dowolnej pary stanów $i, j \in S$*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j,$$

gdzie p_{ij} jest prawdopobieństwem przejścia ze stanu i do j w t krokach, a π jest jedynym wektorem stacjonarnym łańcucha.

Uwaga Proszę zwroócić uwagę, że prawa strona równości w powyższym twierdzeniu nie zależy od i!

Twierdzenie 4. *Jeśli dla łańcucha Markowa o skończonej liczbie stanów istnieje nieujemny, niezerowy wektor $\bar\pi$, taki że dla dowolnej pary stanów $i, j \in S$ zachodzi*

$$p_{ij}\bar\pi_i = p_{ji}\bar\pi_j,$$

to łańcuch taki nazywamy odwracalnym, a wektor π zdefiniowany równością

$$\pi_i = \frac{\bar\pi_i}{\sum_{j\in S}\bar\pi}$$

jest (niekoniecznie jedynym) stanem stacjonarnym tego łańcucha.

Kącik (bio)informatyka

Łańcuchy Markowa są jednym z podstawowych narzędzi wspólczesnej informatyki. Jednym z ich standardowych zastosowań są metody Monte-Carlo, gdy musimy wybrać (lub wygenerować) losowo pewien obiekt z danej rodziny obiektów $\mathcal{A}$. Typową metodą postępowania w takiej sytuacji jest wybranie jednego obiektu z $\mathcal{A}$ i jego losowa modyfikacja tak, by otrzymany obiekt wciąż należał do $\mathcal{A}$. Jeśli zrobimy to dostatecznie umiejętnie, po stosunkowo niewielu losowych zmianach otrzymamy obiekt, który, w dobrym przybliżeniu, może być uznany za losowy element rodziny $\mathcal{A}$.