Zastosowania grafów w bioinformatyce. Wypisy z wykładów.
Wykład IV. Grafy planarne. Minory.

Wprowadzone pojęcia: graf planarny, graf płaski, minor.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1 (Wzór Eulera). *Jeśli G jest spójnym grafem płaskim (tzn. rysunkiem grafu na płaszczyźnie), to*

$$v(G) - e(G) + f(G) = 2\,,$$

gdzie $v(G)$ to liczba wierzchołków grafu G, $e(G)$ jest liczbą krawędzi tego grafu, a $f(G)$ oznacza liczbę jego ścian.

Wniosek. *Jeśli G jest planarnym grafem na co najmniej trzech wierzchołkach, to $e(G) \leqslant 3v(G) - 6$.*

Twierdzenie 2 (Twierdzenie o czterech barwach). *Jeśli G jest planarny, to $\chi(G) \leqslant 4$.*

Definicja Topologiczną kopią *grafu G nazywamy graf, który powstaje z G przez zastąpienie niektórych krawędzi grafu przez ścieżki (np. cykl dowolnej długości jest kopią topologiczną K_3).*

Definicja *Jeśli graf H można otrzymać z G jako wynik ciągu następujących operacji:*

- *usuwania wierzchołka,*
- *usuwania krawędzi,*
- *ściągania krawędzi,*

wtedy mówimy, że H jest **minorem** *grafu G (lub G zawiera H jako minor), co zapisujemy jako $G \rhd H$.*

Twierdzenie 3 (Kuratowski). *G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera kopii topologicznych grafów $K_{3,3}$ i K_5.*

Twierdzenie 4 (Wagner). *G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy $G \not\rhd K_5$ i $G \not\rhd K_{3,3}$.*

Kącik (bio)informatyka

Twierdzenie 5 (Robertson, Seymour). *Każdą rodzinę grafów domkniętą ze względu na branie minorów można scharakteryzować za pomocą skończonej liczby zakazanych minorów.*

Twierdzenie 6 (Robertson, Seymour). *Dla dowolnego grafu H istnieje stała c_H i algorytm $\mathcal{A}_H$, który w czasie niewiększym niż $c_H n^3$ sprawdza, czy ustalony graf na n wierzchołkach zawiera H jako minor.*

Wniosek. *Jeśli $\mathcal{G}$ jest rodziną grafów domkniętą ze względu na branie minorów, to istnieje algorytm, który w czasie $O(n^3)$ sprawdza, czy ustalony graf na n wierzchołkach należy do $\mathcal{G}$.*