Zastosowania grafów w bioinformatyce. Wypisy z wykładów.
Wykład III (3 listopada 2022).

Wprowadzone pojęcia: liczba niezależności α, liczba klikowa cl, liczba chromatyczna χ, wielkość największego skojarzenia μ, wielkość minimalnego pokrycia wierzchołkowego β, wersje ułamkowe liczb μ i β.

Dwie definicje

Definicja *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o m krawędziach, a e_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, będą zmiennymi odpowiadającymi krawędziom G. Rozpatrzmy problem programowania liniowego polegający na maksymalizacji wartości funkcji*

$$f(\mathbf{e}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_m,$$

w obszarze, w którym dla każdego wierzchołka $v \in V$

$$\sum_{e_j \ni v} e_j \leqslant 1\,,$$

(tzn. suma wag krawędzi zawierających dany wierzchołek nie może przekraczać 1). Jeśli szukamy rozwiązania tego problemu gdy $e_j \in \{0, 1\}$, dla $j = 1, 2, \ldots, m$, to maksimum $f(\mathbf{e})$ jest równe wielkości **największego skojarzenia** *w grafie $\mu(G)$. Jeśli szukamy maksimum $f(\mathbf{e})$ dopuszczając wartości ułamkowe e_j, tzn. zakładając tylko, że $e_j \in [0, 1]$, to maksimum jest* **ułamkową liczbą skojarzeniową** *oznaczaną przez $\mu^*(G)$.*

Definicja *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o n wierzchołkach, a v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, będą zmiennymi odpowiadającymi wierzchołkom G. Rozpatrzmy problem programowania liniowego polegający na minimalizacji wartości funkcji*

$$f(\mathbf{v}) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

w obszarze, w którym dla każdej krawędzi $e = \{v_k, v_\ell\} \in V$

$$v_k + v_\ell \geqslant 1\,,$$

(tzn. suma wag końców każdej krawędzi grafu wynosi co najmniej 1). Jeśli szukamy rozwiązania tego problemu gdy $v_i \in \{0, 1\}$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to minimum $f(\mathbf{v})$ jest równe wielkości **najmniejszego pokrycia wierzchołkowego** *grafu $\beta(G)$. Jeśli szukamy minimum $f(\mathbf{v})$ dopuszczając wartości ułamkowe v_i, tzn. zakładając, że $v_i \in [0, 1]$, to minimum jest* **ułamkową liczbą pokryciową** *oznaczaną przez $\beta^*(G)$.*

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1. $\mu(G) \leqslant \mu^*(G) = \beta^*(G) \leqslant \beta(G)$.

Twierdzenie 2. $cl(G) \leqslant \chi(G)$.

Twierdzenie 3. *Jeśli G jest grafem na n wierzchołkach, to $\chi(G) \geqslant n/\alpha(G)$.*

Twierdzenie 4. *Jeśli G jest grafem na n wierzchołkach o maksymalnym stopniu Δ, to*

$$\alpha(G) \geqslant \frac{n}{\Delta + 1} \quad i \quad \chi(G) \leqslant \Delta + 1.$$

Kącik (bio)informatyka

Znalezienie $\alpha(G)$, $cl(G)$ i $\chi(G)$ jest zadaniem bardzo trudnym. Ich wartości nie da się przybliżyć w czasie wielomianowym nawet z dokładnością do czynnika $\sqrt{n}$ (chyba, że $P = NP$).