

Zastosowania grafów w bioinformatyce. Wypisy z wykładów.

Wykład II (20 października 2022). Skojarzenia.

Wprowadzone pojęcia: graf dwudzielny, skojarzenie, skojarzenie maksymalne, skojarzenie największe, skojarzenie doskonałe, system różnych reprezentantów.

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1. *Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera nieparzystego cyklu.*

Twierdzenie 2 (Hall). *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym o dwupodziale $V = X \cup Y$. Graf G zawiera skojarzenie nasycające wszystkie wierzchołki ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$*

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Twierdzenie 3 (Tutte). *Graf $G = (V, E)$ zawiera skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$*

$$o(G \setminus S) \leq |S|,$$

gdzie $o(G \setminus S)$ oznacza liczbę składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków w grafie $G \setminus S$.

Twierdzenie 4 (Christofides). *Niech G będzie grafem z wagami, spełniającymi warunek trójkąta. Istnieje algorytm wielomianowy znajdujący w G cykl Hamiltona o wadze nie większej niż $(3/2)TSP$.*

Na wykładzie udowodniliśmy pierwsze twierdzenie 1, po jednej (prostszej) implikacji z twierdzeń Halla i Tutte'a i opisaliśmy jak działa algorytm Christofidesa.

Kącik (bio)informatyka

Problem decyzyjny "Czy graf zawiera skojarzenie doskonałe?" należy oczywiście do klasy NP.

Twierdzenie Tutte'a pokazuje, że należy on również do klasy coNP.

Można jednak pokazać, że jest on nawet w klasie P. Co więcej, istnieje algorytm o wielomianowym czasie działania znajdujący w zadanym grafie ważonym skojarzenie o największej (albo, jeśli Państwo wolą, najmniejszej) wadze. Z algorytmu takiego korzystamy w algorytmie Christofidesa.

Warto jednak zauważyć problem pokrycia wierzchołków grafu ustalonymi spójnymi podgrafami o więcej niż jednej krawędzi jest NP-zupełny.