Zastosowania grafów w bioinformatyce. Wypisy z wykładów.
Wykład I. Obchody Eulera i cykle Hamiltona.

Wprowadzone pojęcia: obchód Eulera, szlak Eulera, cykl Hamiltona, ścieżka Hamiltona, domknięcie hamiltonowskie grafu, problem chińskiego listonosza, problem podróżującego komiwojażera (TSP)

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1 (Euler)**.** *Spójny graf G ma obchód Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki grafu G mają stopień parzysty.*

Dowód w jedną stronę jest niemal natychmiastowy, dla dowodu w drugą stronę można użyć algorytmu Fleury'ego.

Twierdzenie 2. *Jeśli graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla każdego $S \subseteq V$ mamy*

$$\omega(G \setminus S) \leqslant |S|\,,$$

gdzie $\omega(G \setminus S)$ oznacza liczbę składowych w grafie $G \setminus S$.

Twierdzenie 3 (Dirac)**.** *Jeśli $\delta(G) \geqslant |V|/2$ i $|V| \geqslant 3$, to graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona.*

Kącik (bio)informatyka

Fakt 1. *Istnieje algorytm o wielomianowym czasie działania znajdujący w zadanym grafie ważonym zamknięty spacer o minimalnej wadze, przechodzący przez każdą krawędź przynajmniej raz. Oczywiście, jeśli graf jest eulerowski, wystarczy znaleźć w nim obchód Eulera.*

Fakt 2. *Rozstrzygnięcie, czy zadany graf zawiera cykl Hamiltona jest problemem NP-zupełnym, zatem nie jest znany żaden algorytm, który rozwiązuje go w wielomianowym czasie.*

Fakt 3. *Jeśli przez TSP oznaczymy najmniejszą wagę cyklu Hamiltona w pewnym grafie ważonym G, a przez MST wagę najmniejszego drzewa rozpiętego w tym grafie, to*

$$TSP \geqslant MST\,.$$

Jeśli ponadto wagi w grafie G spełniają warunek trójkąta, to zachodzi również:

$$TSP \leqslant 2MST\,.$$