

Zastosowania grafów w bioinformatyce. Zadania domowe. Zestaw VI (do rozwiązania na ćwiczenia 19 stycznia 2023)

Przez cięcie w poniższych zadaniach rozumiemy - tak jak na wykładzie - zbiór krawędzi skierowanych, odcinających źródło od ujścia.

Zad.1.

Rozważmy sieć z jednym źródłem i jednym ujściem.

- (a) Załóżmy, że wartość maksymalnego przepływu wynosi 10. Czy istnieje w rozważanej sieci cięcie o wartości 8?
- (b) Załóżmy, że wartość minimalnego cięcia w sieci wynosi 10. Czy każdy przepływ w tej sieci ma wartość mniejszą niż 12?

Zad.2.

Minimalne cięcie w pewnej sieci z jednym źródłem i jednym ujściem składa się z trzech strzałek: strzałki ab o pojemności 3, strzałki cd o pojemności 4 i strzałki ad o pojemności 2, przy czym wierzchołki a, c leżą po stronie źródła, a wierzchołki b i d po stronie ujścia.

- (a) Ile wynosi maksymalny przepływ w tej sieci?
- (b) Czy jeśli zwiększymy o jeden pojemności każdej ze strzałek ab, cd i ad o 1, to wielkość największego przepływu musi się zwiększyć?

Zad.3.

Dana jest sieć D , o jednym źródle s i jednym ujściu t , w której każda krawędź ma pojemność jeden. Uzasadnij, że jeśli w sieci tej istnieje k krawędziowo rozłącznych ścieżek skierowanych z s do t , to:

- (a) wartość maksymalnego przepływu wynosi co najmniej k .
- (b) wartość każdego cięcia wynosi przynajmniej k .

Zad.4.

Niech $w_{max}(\cdot)$ oznacza wartość największego przepływu w sieci. Załóżmy, że znamy $w_{max}(P)$ pewnej sieci P o wszystkich pojemnościach krawędzi całkowitych. Oznaczmy przez P' sieć powstałą z P przez zwiększenie pojemności jednej krawędzi o 1. Uzasadnij, że $w_{max}(P')$ wynosi $w_{max}(P)$ lub $w_{max}(P) + 1$.

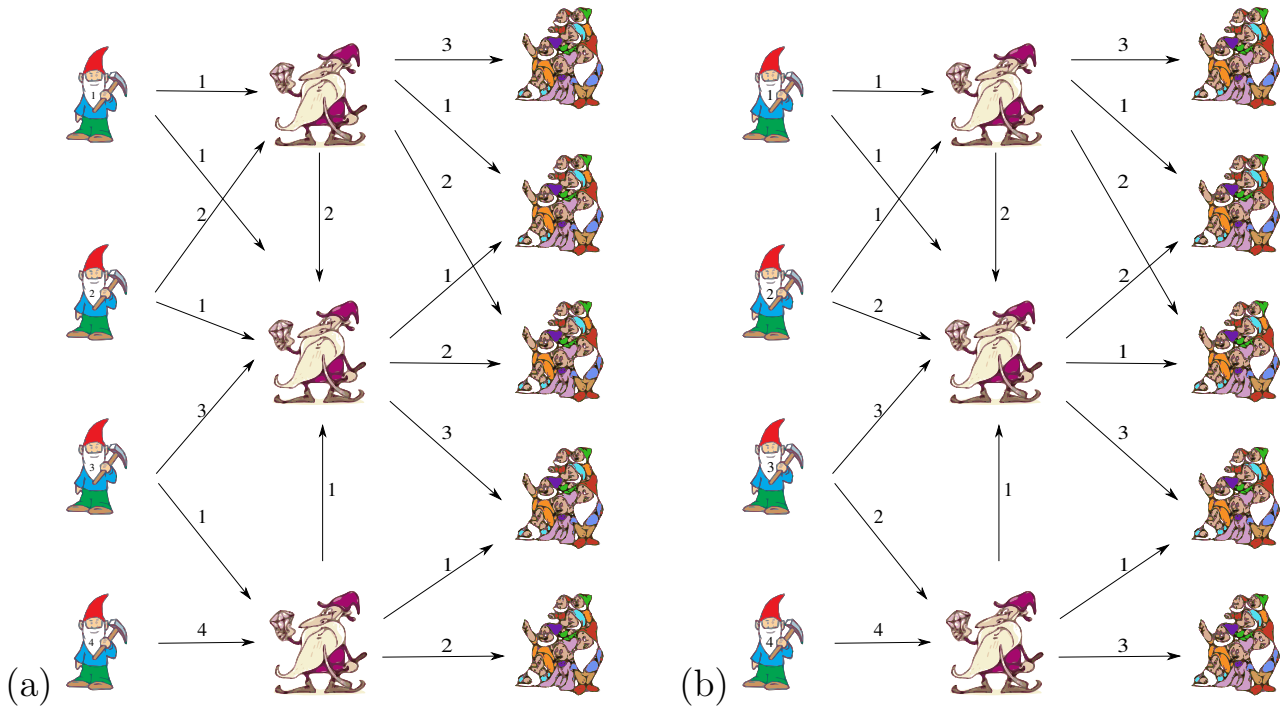
Zad.5.

Załóżmy, że x, y, z, w są różnymi wierzchołkami sieci P z poprzedniego zadania, zwiększamy o 1 pojemności dwóch strzałek, xy i yz oraz zmniejszamy o 1 pojemność strzałki wy . Jak może się zmienić wartość największego przepływu $val_{max}(P'')$ w tak otrzymanej sieci P'' w stosunku do $w_{max}(P)$?

verte \rightarrow

Zad.6.

Czterech krasnoludów chce rozesłać prezenty do 5 rodzin, korzystając z sieci 3 pośredników. Krasnolud i -ty musi wysłać dokładnie i prezentów, a każda rodzina musi dostać po 2 prezenty. Pośrednicy tylko przesyłają prezenty. Na rysunku podane są przepustowości łączy, czyli liczby prezentów, jakie mogą być przesłane bezpośrednio między dwoma węzłami naszej prezentowej sieci (tworzonej przez krasnoludy, pośredników i rodziny).



- Sprawdź, która sieć prezentowa zadziała, tzn. w której sieci prezenty mogą być rozesłane zgodnie z powyższymi zasadami. W tym przypadku opisz, jak krasnoludy rozesła prezenty.
- Przetłumacz problem rozesłania prezentów na równoważny mu problem przepływu w sieciach z jednym źródłem i jednym ujściem. Jaki warunek musi być spełniony, by sieć prezentowa mogła zadziałać?