

Zastosowania grafów w bioinformatyce. Zadania domowe.

Zestaw V (do rozwiązania na ćwiczenia 5 stycznia 2023)

Zad.1. Niech G będzie grafem nieskierowanym o czterech wierzchołkach i pięciu krawędziach (tzn. G jest cyklem o długości cztery z jedną przekątną). Rozpatrzmy błądzenie losowe na grafie G , gdy żeton umieszczony w wierzchołku v przesuwamy do jego sąsiada z prawdopodobieństwem $1/\deg(v)$. Wypisz macierz przejścia Π dla tak określonego łańcucha Markowa i znajdź rozkłady $\mu^{(1)}$ i $\mu^{(2)}$ położenia żetonu X_1 i X_2 po jednym i dwóch ruchach, jeśli na początku umieszczamy żeton:

(i) w jednym z wierzchołków o stopniu trzy, tzn.

$$P(X_0 = 1) = 1, \quad P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0,$$

(ii) z losowo wybranym wierzchołku, tzn.

$$P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 1/4.$$

Zad.2. Dla łańcucha Markowa zdefiniowanego w zadaniu 1 znajdź macierz $\Pi^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]$, gdzie $p_{ij}^{(2)}$ jest prawdopodobieństwem przejścia z wierzchołka i do wierzchołka j w dwóch krokach. Korzystając z tej macierzy ponownie oblicz X_2 dla przypadków (i) i (ii) nie obliczając rozkładu X_1 .

Zad.3. Łąka przedzielona jest niskim murkiem na część północną i południową. Po przeciwnych stronach murku siedzą dwie ropuchy (ropucha Orłoś po stronie północnej, ropucha Resztko po stronie południowej) rzucając monetą. Gdy wypadnie orzeł, Orłoś przeskakuje przez murek na drugą stronę, jeśli reszka, przez murek przeskakuje Resztko.

- (i) Znajdź macierz przejścia Π dla łańcucha Markowa związanego z zabawą dwóch ropuch. Zwróć uwagę, że łańcuch ten ma cztery stany (Orłoś po stronie północnej, ropucha Resztko po stronie południowej; obie ropuchy po północnej; obie ropuchy po południowej; Orłoś po południowej, Resztko po północnej).
- (ii) Znajdź rozkłady X_1 , X_2 i X_3 .
- (iii) Czy tak zdefiniowany łańcuch Markowa jest nierozkładalny? Okresowy? Odwracalny?
- (iv) Korzystając z (iii) znajdź rozkład stacjonarny tego łańcucha.
- (v) Znajdź prawdopodobieństwo, że po 117345 rzutach monetą obie ropuchy znajdą się na północnej stronie łąki.
- (vi) Czy dla powyższego łańcucha zachodzi twierdzenie ergodyczne?

Zad.4. Cząsteczka spaceruje po ścieżce o 3 wierzchołkach, ponumerowanych liczbami $-1, 0, 1$. Z każdej chwili z prawdopodobieństwem $1/2$ pozostaje w miejscu, a z prawdopodobieństwem $1/2$ przemieszcza się do sąsiedniego wierzchołka, przy czym w punkcie 0 szanse wybrania -1 i 1 są takie same. Zakładamy, że w chwili 0 cząsteczka z jednakowym prawdopodobieństwem znajduje się w stanie $-1, 0$ lub 1 .

- (i) Wypisz macierz przejścia Π dla powyższego łańcucha Markowa.
- (ii) Wykorzystując fakt, że łańcuch ten jest odwracalny, znajdź jego rozkład stacjonarny.
- (iii) Podaj w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że po 14567 krokach cząsteczka znajdzie się w punkcie 0.