

Metoda Probabilistyczna. Zadania domowe.

Zestaw IX. Termin: 21 maja 2025

Zad.13

Proszę udowodnić, w podobny sposób jak pokazywaliśmy Twierdzenie o Mieszaniu dla ekspanderów, następującą wersję tego wyniku prawdziwą dla ekspanderów dwudzielnych.

Twierdzenie *Niech G będzie d -regularnym grafem dwudzielnym o zbiorze wierzchołków $V_1 \cup V_2$, gdzie $|V_1| = |V_2| = n$ i wszystkie krawędzie łączą wierzchołki V_1 z V_2 . Ponadto niech*

$$d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{2n-1} \geq \lambda_{2n} = -d$$

będą wartościami własnymi macierzy przyległości grafu G . Wtedy dla dowolnych podzbiorów $W_1 \subseteq V_1$ i $W_2 \subseteq V_2$ zachodzi

$$\left| e_G(W_1, W_2) - \frac{d}{n} |W_1| |W_2| \right| \leq \lambda_2 \sqrt{|W_1| |W_2|}.$$

Wskazówki i uwagi:

1) Spektrum dowolnego grafu dwudzielnego jest symetryczne, tzn. dla wartości własnych grafu G zachodzi $\lambda_i = -\lambda_{2n-i+1}$, dla $i = 1, 2, \dots, n$. Stąd

$$\lambda_2 = \max_{2 \leq i \leq 2n-1} |\lambda_i|.$$

2) Jednym z wektorów własnych odpowiadających wartości własnej d jest oczywiście wektor, którego wszystkie współrzędne to jedynki. Wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $-d$ jest wektor, którego połowa współrzędnych to jedynki, a połowa to minus jedynki.

3) Dowód twierdzenia o mieszanii, który podałem na wykładzie, można znaleźć np. w doskonałym artykule przeglądowym Hoory'ego, Liniala i Wigdersona

https://www.cs.huji.ac.il/~nati/PAPERS/expander_survey.pdf

Jest to Lemat 2.5, którego krótki dowód znajduje się na stronach 454–455.