Metoda Probabilistyczna. Zadania domowe.

Zestaw III. Termin: 19 marca 2025

Zad.5

Dana jest macierz $A = [a_{ij}]$, o wymiarach $n \times n$, której wyrazy są różnymi liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że istnieje taka permutacja $\sigma : [n] \to [n]$ wierszy tej macierzy i taka permutacja $\tau : [n] \to [n]$ jej kolumn, że żaden wiersz i żadna kolumna spermutowanej macierzy $A_{\sigma\tau} = [a_{\sigma(i)\tau(j)}]$ nie zawiera ciągu rosnącego (o niekoniecznie kolejnych wyrazach) dłuższego niż $100\sqrt{n}$.

Uwaga: Być może przyda się Państwu oszacowanie

$$\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

i wzór Stirlinga $n! = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}(n/e)^n > (n/e)^n$.

Zad.6

W zadaniu poniżej przez słowo będziemy rozumieli ciąg utworzony z czterech liter: a, b, c, d. Dla dwóch słów w_1 i w_2 symbol $w_1 \prec w_2$ oznacza, że słowo w_1 występuje na początku słowa w_2, czyli np. $abb \prec abbad$, ale $abb \not\prec ababad$. Długość $|w|$ słowa w to liczba liter w tym słowie, czyli np. $|abbad| = 5$.

Niech $\mathcal{W}$ będzie zbiorem słów, w którym nie ma trzech słów w_1, w_2, w_3 takich, że $w_1 \prec w_2 \prec w_3$. Pokazać, że

$$\sum_{w \in \mathcal{W}} 2^{-2|w|-1} \leqslant 1\,.$$

Wskazówka: Dowód tej nierówności zacząłbym się zdaniem: *Utwórzmy nieskończony losowy ciąg składający się z liter* a, b, c, d.