

## Metoda Probabilistyczna. Zadania domowe.

### Zestaw VIII. Termin: 15 maja 2024

#### Zad.12.

Znajdź wszystkie wartości  $d \geq 2$ , dla których mogą istnieć grafy  $G$  o następujących własnościach:

- (i)  $G$  ma  $d^2 + 1$  wierzchołków,
- (ii)  $G$  jest  $d$ -regularny,
- (iii)  $G$  nie zawiera trójkątów i cykli o długości 4,
- (iv) dowolna para wierzchołków z  $G$ , która nie jest połączona krawędzią, jest połączona dokładnie jedną ścieżką o długości dwa.

Przykładami takich grafów są cykl o długości 5 i graf Petersena.

**Wskazówka:** Wypisz równanie, które spełnia macierz przyległości takiego grafu i na tej podstawie oblicz jego spektrum (tj. znajdź wszystkie własności własne z odpowiednimi krotnościami).

#### Zad.13.

Niech  $p = c/n$ , gdzie  $c > 0$  będzie ustaloną stałą, a  $X$  będzie liczbą trójkątów w grafie losowym  $G(n, p)$ .

Dla każdego  $k \geq 1$  znajdź granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X(X-1)\dots(X-k+1).$$

**Wskazówka:** Zmienna losowa  $X(X-1)\dots(X-k+1)$  liczy  $k$ -tki różnych trójkątów w grafie  $G(n, p)$ .